

Chương 1

MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP


§1. MỆNH ĐỀ

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Mệnh đề

Định nghĩa 1. Mệnh đề logic (gọi tắt là mệnh đề) là một câu khẳng định **hoặc đúng hoặc sai**.

- Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.
- Một câu khẳng định đúng gọi là **mệnh đề đúng**. Một câu khẳng định sai gọi là **mệnh đề sai**.

 *Những điểm cần lưu ý.*

- Các câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh không phải là mệnh đề.
- Mệnh đề thường được kí hiệu bằng các chữ cái in hoa.
Ví dụ: Q : “6 chia hết cho 3”.
- Một câu mà chưa thể nói đúng hay sai nhưng chắc chắn nó chỉ đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai cũng là một mệnh đề.
Ví dụ: “Có sự sống ngoài Trái Đất” là mệnh đề.
- Trong thực tế, có những mệnh đề mà tính đúng sai của nó luôn gắn với một thời gian và địa điểm cụ thể: đúng ở thời gian hoặc địa điểm này nhưng sai ở thời gian hoặc địa điểm khác. Nhưng ở bất kì thời điểm nào, địa điểm nào cũng luôn có giá trị chân lí đúng hoặc sai.
Ví dụ: Sáng nay bạn An đi học.

2. Mệnh đề chứa biến

Định nghĩa 2. Những câu khẳng định mà tính **đúng-sai** của chúng tùy thuộc vào giá trị của biến gọi là những **mệnh đề chứa biến**.

Ví dụ: Cho $P(x) : x > x^2$ với x là số thực. Khi đó $P(2)$ là mệnh đề sai, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ là mệnh đề đúng.

3. Mệnh đề phủ định

Định nghĩa 3. Cho mệnh đề P . Mệnh đề “**Không phải P** ” được gọi là mệnh đề phủ định của P và kí hiệu là \bar{P} .

- Mệnh đề P và mệnh đề phủ định \bar{P} là hai câu khẳng định trái ngược nhau. Nếu P đúng thì \bar{P} sai, nếu P sai thì \bar{P} đúng.
- Mệnh đề phủ định của P có thể diễn đạt theo nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn, xét mệnh đề P : “2 là số chẵn”. Khi đó, mệnh đề phủ định của P có thể phát biểu là \bar{P} : “2 không phải là số chẵn” hoặc “2 là số lẻ”.

4. Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo

Định nghĩa 4. Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề “Nếu P thì Q ” được gọi là **mệnh đề kéo theo**.

- Ký hiệu là $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề kéo theo chỉ sai khi P đúng Q sai.
- $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là “ P kéo theo Q ”, “ P suy ra Q ” hay “Vì P nên Q ”.

⚠ Chú ý

- Trong toán học, định lý là một mệnh đề đúng, thường có dạng: $P \Rightarrow Q$. Khi đó ta nói P là giả thiết, Q là kết luận của định lý, hoặc P là điều kiện đủ để có Q , hoặc Q là điều kiện cần để có P .
- Trong logic toán học, khi xét giá trị chân lý của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ người ta không quan tâm đến mối quan hệ về nội dung của hai mệnh đề P, Q . Không phân biệt trường hợp P có phải là nguyên nhân để có Q hay không mà chỉ quan tâm đến tính đúng, sai của chúng.

Ví dụ: “Nếu mặt trời quay quanh trái đất thì Việt Nam nằm ở châu Âu” là một mệnh đề đúng. Vì ở đây hai mệnh đề P : “Mặt trời quay xung quanh trái đất” và Q : “Việt Nam nằm ở châu Âu” đều là mệnh đề sai.

Định nghĩa 5. Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

⚠ Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là một mệnh đề đúng.

5. Mệnh đề tương đương

Định nghĩa 6. Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề có dạng “ P nếu và chỉ nếu Q ” được gọi là mệnh đề tương đương.

- Ký hiệu là $P \Leftrightarrow Q$
- Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ cùng đúng hoặc cùng sai. (Hay $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề P và Q cùng đúng hoặc cùng sai)
- $P \Leftrightarrow Q$ còn được phát biểu là “ P khi và chỉ khi Q ”, “ P tương đương với Q ”, hay “ P là điều kiện cần và đủ để có Q ”.

⚠ Hai mệnh đề P, Q tương đương với nhau hoàn toàn không có nghĩa là nội dung của chúng như nhau, mà nó chỉ nói lên rằng chúng có cùng giá trị chân lý (cùng đúng hoặc cùng sai).

Ví dụ: “Hình vuông có một góc tù khi và chỉ khi 100 là số nguyên tố” là một mệnh đề đúng.

6. Các ký hiệu \forall và \exists

- Ký hiệu \forall (với mọi): “ $\forall x \in X, P(x)$ ” hoặc “ $\forall x \in X : P(x)$ ”.
- Ký hiệu \exists (tồn tại): “ $\exists x \in X, P(x)$ ” hoặc “ $\exists x \in X : P(x)$ ”.

⚠ Chú ý

- Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
- Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Mệnh đề có nội dung đại số và số học

Ví dụ 1. Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- A : “ $\sqrt{6}$ là số hữu tỉ”.
- B : “ n chia hết cho 3 và 5 thì n chia hết cho 15”.
- C : “ $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 + x + 3 > 0$ ”.
- D : “ $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$ ”.

Lời giải.

- \bar{A} : “ $\sqrt{6}$ không là số hữu tỉ”.
- \bar{B} : “ n không chia hết cho 3 hoặc n không chia hết cho 5 thì nó không chia hết cho 15”.
- \bar{C} : “ $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 + x + 3 \leq 0$ ”.
- \bar{D} : “ $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \neq 2$ ”.

Ví dụ 2. Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau và tìm mệnh đề phủ định của nó:

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 6 > 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$.

Lời giải.

- Mệnh đề đúng.
Phủ định là $\bar{A} : \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 6 \leq 0$.
- Mệnh đề sai vì phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm trong \mathbb{R} .
Phủ định là $\bar{B} : “\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \neq 0$ ”.
- Mệnh đề đúng, ví dụ $x = \frac{1}{2}$.
Phủ định là $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x^2$

Ví dụ 3. Điều chỉnh các mệnh đề sau để được các mệnh đề đúng:

- $\forall x \in \mathbb{R} : 3x - 1 = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{x}$.

Lời giải.

- a) $\exists x \in \mathbb{R} : 3x - 1 = 0$.
- b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x = 0$.
- c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$ hoặc $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$.
- d) $\exists x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{x}$.

Ví dụ 4. Chứng minh “Nếu n^2 là số chẵn thì n là số chẵn.”

Lời giải.

Giả sử n là số lẻ $\Rightarrow n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
 $\Rightarrow n^2$ là số lẻ (trái giả thiết).

Vậy n là số chẵn.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng:

- a) Với mọi số nguyên n thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.
- b) Với mọi số nguyên n thì $n(n-1)(2n-1)$ chia hết cho 6.

Lời giải.

- a) Ta có: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$.
 Do $n-1, n, n+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3.
 Khi đó $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 3 hay $n^3 - n$ chia hết cho 3.
- b) Ta có $n-1, n$ là 2 số nguyên liên tiếp nên tích $n(n-1)(2n-1)$ chia hết cho 2.
 Xét 3 số nguyên liên tiếp $n-1, n, n+1$, trong 3 số này có ít nhất 1 số chia hết cho 3.
- Nếu 1 trong 2 số $n-1, n$ cho hết cho 3 thì tích $n(n-1)(2n-1)$ chia hết cho 3.
 - Nếu $n+1$ chia hết cho 3 thì $2n-1 = 2(n+1) - 3$ cũng chia hết cho 3. Suy ra tích $n(n-1)(2n-1)$ chia hết cho 3.
- Vậy tích $n(n-1)(2n-1)$ vừa chia hết cho 2 vừa chia hết cho 3 nên chia hết cho 6.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Hãy xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau đây và tìm mệnh đề phủ định của chúng:

- a) $A : “\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 1”$.
- b) $B : “\exists x \in \mathbb{Z} : 6x^2 - 13x + 6 = 0”$.
- c) $C : “\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : y = x + 2”$.
- d) $D : “\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 0”$.

Lời giải.

- a) Mệnh đề sai, ví dụ như $x = 0$.
 Phủ định là $\bar{A} : “\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1”$.

b) Mệnh đề sai vì $6x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$, cả hai nghiệm đều không thuộc \mathbb{Z} .

Phủ định là \bar{B} : " $\forall x \in \mathbb{Z} : 6x^2 - 13x + 6 \neq 0$ ".

c) Mệnh đề đúng.

Phủ định là \bar{C} : " $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : y \neq x + 2$ ".

d) Mệnh đề sai, ví dụ $x = 1, y = -2$.

Phủ định là \bar{D} : " $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} < 0$ ".

Bài 2. Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau. Nếu mệnh đề sai hãy sửa lại cho đúng:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 4 \Rightarrow x > 16$.

b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 36 \Rightarrow x > 6$.

c) $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$.

d) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Leftrightarrow a > c$.

e) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a : 3 \\ b : 2 \end{cases} \Leftrightarrow ab : 6$.

Lời giải.

a) Mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề sai, ví dụ $x = -7$.

Sửa lại là $\forall x \in \mathbb{R} : x > 6 \Rightarrow x^2 > 36$ hoặc $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 36 \Rightarrow x > 6$.

c) Mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$ là đúng.

Mệnh đề $a > c \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases}$ là sai, ví dụ như $a = 3, c = 1, b = 0$.

Như vậy mệnh đề $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$ là sai.

Sửa lại mệnh đề đúng là $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$.

e) Mệnh đề $\begin{cases} a : 3 \\ b : 2 \end{cases} \Rightarrow ab : 6$ là đúng.

Mệnh đề $ab : 6 \Rightarrow \begin{cases} a : 3 \\ b : 2 \end{cases}$ là sai, ví dụ như $a = 6, b = 1$.

Như vậy mệnh đề $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a:3 \\ b:2 \end{cases} \Leftrightarrow ab:6$ là sai.

Sửa lại mệnh đề đúng là $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a:3 \\ b:2 \end{cases} \Rightarrow ab:6$

Bài 3. Xét tính đúng - sai các mệnh đề sau và tìm mệnh đề phủ định của chúng:

- a) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
 b) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 + 2 > b^2 + 1$.
 c) $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a + b > 1$.
 d) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 < b$.
 e) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a^2 = b + 1$.
 f) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ mà $a + b + c = 0$ thì $-\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = ab + bc + ca$.

Lời giải.

- a) Mệnh đề sai vì $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
 Phủ định là $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : (a+b)^2 \neq a^2 + 2ab + b^2$.
 b) Mệnh đề sai, ví dụ $a = 0, b = 2$.
 Phủ định là $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a^2 + 2 \leq b^2 + 1$.
 c) Mệnh đề đúng.
 Phủ định là $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a + b \leq 1$.
 d) Mệnh đề sai, ví dụ $a = 3, b = 1$.
 Phủ định là $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a^2 \geq b$.
 e) Mệnh đề đúng, số b xác định bởi $b = a^2 - 1, \forall a \in \mathbb{R}$.
 Phủ định là $\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 \neq b + 1$.
 f) Mệnh đề đúng vì $a + b + c = 0 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 0$
 $\Leftrightarrow -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = ab + bc + ca$.
 Phủ định là $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ mà $a + b + c \neq 0$ thì $-\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \neq ab + bc + ca$.

Bài 4. Chứng minh rằng $\forall a, b > 0 : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Lời giải.

Giả sử: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 2 \Rightarrow a^2 + b^2 < 2ab \Rightarrow (a-b)^2 < 0$ (vô lý).

Vậy $\forall a, b > 0 : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Bài 5. a) Nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.

b) Nếu $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.

c) Nếu tích của hai số tự nhiên là một số lẻ thì tổng của chúng là một số chẵn.

d) Nếu $x^2 + y^2 = 0$ thì $x = 0$ và $y = 0$.

Lời giải.

a) Giả sử $a \geq 1$ và $b \geq 1$, suy ra $a + b \geq 2$ (trái giả thiết).

Vậy nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.

b) Giả sử: $x + y + xy = 1 \Rightarrow x + 1 + y + xy = 0 \Rightarrow (x + 1)(y + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ (trái giả thiết).

Vậy nếu $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.

c) Giả sử tổng $a + b$ là số lẻ thì một trong hai số a, b có 1 số là số lẻ còn số còn lại là số chẵn nên tích $a.b$ là số chẵn (trái giả thiết).

Vậy nếu tích của hai số tự nhiên là một số lẻ thì tổng của chúng là một số chẵn.

d) Giả sử $x \neq 0$ hoặc $y \neq 0$.

• Nếu $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 0$ (trái giả thiết).

• Nếu $y \neq 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 0$ (trái giả thiết).

Vậy nếu $x^2 + y^2 = 0$ thì $x = 0$ và $y = 0$.

Bài 6. Chứng minh rằng $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases} \Rightarrow |x + y| < |1 + xy|$.

Lời giải.

Giả sử $|x + y| \geq |1 + xy| \Rightarrow (|x + y|)^2 \geq (|1 + xy|)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 1 + x^2y^2 + 2xy$

$\Rightarrow (1 - x^2)(1 - y^2) \leq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \leq 0 \\ 1 - y^2 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \\ 1 - y^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |x| \leq 1 \\ |y| \geq 1 \end{cases}$ (trái giả thiết)

Vậy $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases} \Rightarrow |x + y| < |1 + xy|$.

Bài 7. Chứng minh $\sqrt{a} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1}, \forall a > 0$.

Lời giải.

Giả sử $\sqrt{a} + \sqrt{a+2} \geq 2\sqrt{a+1}, \forall a > 0$

$\Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{a+2})^2 \geq (2\sqrt{a+1})^2$

$\Rightarrow a + 2\sqrt{a(a+2)} + a + 2 \geq 4(a+1)$

$\Rightarrow \sqrt{a(a+2)} \geq a + 1, \text{ với } a + 1 > 0$

$\Rightarrow a^2 + 2a \geq a^2 + 2a + 1$

$\Rightarrow 0 > 1$ (vô lí)

Vậy $\forall a > 0: \sqrt{a} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1}$.

Bài 8. Chứng minh rằng nếu $ac > 2(b+d)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

Lời giải. Giả sử cả hai phương trình đều vô nghiệm, khi đó ta có

$$\begin{cases} \Delta_1 = a^2 - 4b < 0 \\ \Delta_2 = c^2 - 4d < 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + c^2 < 4(b+d)$$

$\Rightarrow a^2 + c^2 < 2ac$ (do $2(b+d) \leq ac$)

$\Rightarrow (a-c)^2 < 0$ (vô lí).

Vậy ít nhất 1 trong 2 phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 9. Chứng minh khi ta nhốt $n + 1$ con gà vào n cái lồng thì có ít nhất 1 lồng chứa ít nhất 2 con gà.

Lời giải. Giả sử không có lồng nào chứa nhiều hơn 1 con gà. Khi đó số gà sẽ không nhiều hơn số lồng. Vậy có nhiều nhất là n con gà. Điều này mâu thuẫn với giả thiết có $n + 1$ con gà.

Vậy khi ta nhốt $n + 1$ con gà vào n cái lồng thì có ít nhất 1 lồng chứa ít nhất 2 con gà.

Bài 10. Chứng minh với mọi số tự nhiên n :

a) $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

b) $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

Lời giải.

a) Giả sử $n^2 + n + 1$ chia hết cho 9, khi đó $n^2 + n + 1 = 9k$, với k là số nguyên. Như vậy phương trình $n^2 + n + 1 - 9k = 0$ (1) sẽ có nghiệm nguyên.

Xét $\Delta = 1 - 4(1 - 9k) = 36k - 3 = 3(12k - 1)$. Ta thấy Δ chia hết cho 3, $12k - 1$ không chia hết cho 3 nên Δ không chia hết cho 9, do đó Δ không là số chính phương nên phương trình (1) không có nghiệm nguyên (mâu thuẫn giả thiết).

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

b) Giả sử $n^2 + 11n + 39$ chia hết cho 49, khi đó $n^2 + 11n + 39 = 49k$, với k là số nguyên. Như vậy phương trình $n^2 + 11n + 39 - 49k = 0$ (1) sẽ có nghiệm nguyên.

Xét $\Delta = 11^2 - 4(39 - 49k) = 196k - 35 = 7(28k - 5)$. Ta thấy Δ chia hết cho 7, $28k - 5$ không chia hết cho 7 nên Δ không chia hết cho 49, do đó Δ không là số chính phương nên phương trình (1) không có nghiệm nguyên (mâu thuẫn giả thiết).

Vậy $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

Dạng 2. Mệnh đề có nội dung hình học

Ví dụ 6. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

a) P : “Hai véc-tơ bằng nhau thì có độ dài bằng nhau”.

b) Q : “Hai véc-tơ bằng nhau nếu chúng có độ dài bằng nhau”.

Lời giải.

a) Mệnh đề P là mệnh đề đúng theo định nghĩa hai véc-tơ bằng nhau.

b) Mệnh đề Q là mệnh đề sai. Hai véc-tơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có độ dài bằng nhau. Như vậy còn thiếu điều kiện về hướng của hai véc-tơ.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC . Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

a) Nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì tam giác ABC vuông tại B .

b) Nếu $AB > AC$ thì $\widehat{C} > \widehat{B}$.

c) Tam giác ABC đều khi và chỉ khi nó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $AB = AC$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

Lời giải.

a) Mệnh đề sai. Mệnh đề đúng là: “Nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì tam giác ABC vuông tại A ”.

b) Mệnh đề đúng theo mối liên hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác.

c) Mệnh đề đúng theo dấu hiệu nhận biết tam giác đều.

Ví dụ 8. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó thỏa mãn $AC = BD$.
 b) Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nếu nó có ba góc vuông.

Lời giải.

- a) Mệnh đề sai. Mệnh đề có cấu trúc $P \Leftrightarrow Q$ trong đó mệnh đề $P \Rightarrow Q$: “Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì $AC = BD$ ” là mệnh đề đúng còn mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề sai.
 b) Mệnh đề đúng, theo dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} cùng hướng với véc-tơ \vec{c} thì \vec{a}, \vec{b} cùng hướng.
 b) Trong ba véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$ và cùng phương thì có ít nhất hai véc-tơ cùng hướng.

Lời giải.

- a) Mệnh đề đúng theo cách hiểu về hướng của véc-tơ.
 b) Mệnh đề đúng. Thật vậy: Xét ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác véc-tơ $\vec{0}$ và cùng phương. Khi đó có 2 trường hợp:

Trường hợp 1. Hai véc-tơ \vec{a}, \vec{b} cùng hướng
 Trường hợp này phù hợp kết luận.

Trường hợp 2. Hai véc-tơ \vec{a}, \vec{b} ngược hướng
 Khi đó nếu véc-tơ \vec{c} ngược hướng với véc-tơ \vec{a} thì \vec{c} và \vec{b} cùng hướng.

Bài 12. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.
 b) Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi nó có một góc bằng 60° và hai đường trung tuyến bằng nhau.

Lời giải.

- a) Mệnh đề sai vì hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau nhưng ngược lại, hai tam giác có diện tích bằng nhau thì có thể không bằng nhau. Ví dụ một tam giác vuông có cạnh góc vuông là 2 và 8, tam giác vuông thứ hai có cạnh góc vuông là 4 và 4 có cùng diện tích nhưng hai tam giác không bằng nhau.
 b) Mệnh đề đúng. Thật vậy, xét tam giác ABC tùy ý.
 +) Nếu tam giác ABC đều thì cả ba góc bằng 60° và cặp trung tuyến nào cũng bằng nhau.
 +) Ngược lại, giả sử có hai trung tuyến BM và CN bằng nhau. Khi đó hình thang $BCMN$ có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình thang cân. Do đó tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$ và góc một góc bằng 60° nên tam giác ABC đều.

Bài 13. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Một tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi nó có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.
 b) Một tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi nó có hai đường chéo bằng nhau.

Lời giải.

- a) Mệnh đề đúng, theo dấu hiệu nhận biết hình bình hành.
 b) Mệnh đề sai. Chẳng hạn hình thang cân có hai đường chéo bằng nhau nhưng không nhất thiết phải là hình bình hành.

Bài 14. Cho tứ giác $ABCD$. Xét hai mệnh đề:

P : “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông”.

Q : “Tứ giác $ABCD$ là hình thoi có hai đường chéo bằng nhau”.

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

Lời giải. Phát biểu mệnh đề:

Cách 1. “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi nó là hình thoi có hai đường chéo bằng nhau”.

Cách 2. “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông là điều kiện cần và đủ để nó là hình thoi có hai đường chéo bằng nhau”.

Mệnh đề này đúng theo tính chất và dấu hiệu nhận biết hình vuông.

Bài 15. Xét các tập hợp:

X : tập hợp các tứ giác.

A : Tập hợp các hình vuông.

B : Tập hợp các hình chữ nhật.

D : Tập hợp các hình thoi.

E : Tập hợp các tứ giác có trục đối xứng.

Phát biểu thành lời nội dung các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

- a) $\forall x \in X, x \in B \Rightarrow x \in A$.
 b) $\forall x \in X, x \in A \Rightarrow x \in D$.
 c) $\forall x \in X, x \in E \Rightarrow x \in B$.
 d) $\forall x \in X, x \in D \Rightarrow x \in E$.
 e) $\exists x \in E: x \notin B$.

Lời giải.

- a) Phát biểu: “Mọi hình chữ nhật đều là hình vuông”.
 Mệnh đề này sai vì hai cạnh của hình chữ nhật không phải lúc nào cũng bằng nhau.
 b) Phát biểu: “Mọi hình vuông đều là hình thoi”.
 Mệnh đề này đúng vì mọi hình vuông đều là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
 c) Phát biểu: “Mọi tứ giác có trục đối xứng đều là hình chữ nhật”.
 Mệnh đề này sai, ví dụ hình thang cân có trục đối xứng nhưng hình thang cân có các góc có số đo không nhất thiết phải bằng 90° .
 d) Phát biểu: “Mọi hình thoi đều có trục đối xứng”.
 Mệnh đề này đúng vì mỗi hình thoi đều có *ít nhất* hai trục đối xứng là hai đường chéo.

- e) Phát biểu: “Tồn tại một tứ giác có trục đối xứng mà không phải là hình chữ nhật”.
Mệnh đề này đúng, chẳng hạn hình thang cân có góc ở đáy bằng 60° .

Dạng 3. Thành lập mệnh đề - Mệnh đề phủ định

- Phát biểu thành lời khi cho cho một mệnh đề dạng kí hiệu.
- Dùng kí hiệu \forall, \exists phát biểu một mệnh đề.
- Xét tính Đúng – Sai của các mệnh đề.
- Phủ định một mệnh đề.

Ví dụ 9. Phát biểu thành lời các mệnh đề sau đây:

- “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 0$ ”.
- “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < \frac{1}{2}$ ”.
- “ $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} \geq x$ ”.
- “ $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} > x$ ”.

Lời giải.

- Mọi số thực đều có bình phương khác không.
- Tồn tại một số thực mà bình phương của nó nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.
- Mọi số thực đều có nghịch đảo lớn hơn hoặc bằng chính nó.
- Tồn tại một số thực sao cho căn bậc hai của nó lớn hơn nó.

Ví dụ 10. Dùng các kí hiệu \forall, \exists phát biểu các mệnh đề sau:

- Tồn tại một số tự nhiên chia hết cho 9.
- Mọi số không âm đều lớn hơn không.
- Tồn tại một số thực không là số dương cũng không là số âm.

Lời giải.

- “ $\exists n \in \mathbb{N}, n : 9$ ”.
- “ $\forall x \geq 0, x > 0$ ”.
- “ $\exists x \in \mathbb{R}, x = 0$ ”.

Ví dụ 11. Xét tính Đúng – Sai của các mệnh đề sau:

- “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ ”.
- “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$ ”.

Lời giải.

- a) $\exists x = 0 \in \mathbb{R}, 0^2 = 0 \Rightarrow$ Mệnh đề sai.
 b) $\exists n = 1 \in \mathbb{N}, 1^2 = 1 \Rightarrow$ Mệnh đề sai.

Ví dụ 12. Phủ định các mệnh đề sau đây:

- a) Tất cả bài tập trong sách này đều dễ.
 b) Có ít nhất một hình thang nội tiếp được trong đường tròn.
 c) “ $\exists x \in \mathbb{R}, x + 3 = 5$ ”.
 d) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x > 5$ ”.

Lời giải.

- a) Tồn tại một bài tập trong sách không dễ.
 b) Mọi hình thang đều không nội tiếp được trong đường tròn.
 c) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x + 3 \neq 5$ ”.
 d) “ $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 5$ ”.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 16. Phát biểu thành lời các mệnh đề sau đây:

- a) “ $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} = x$ ”.
 b) “ $\exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ ”.
 c) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 8 > 0$ ”.
 d) “ $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 5x \leq 0$ ”.

Lời giải.

- a) Tồn tại một số thực mà nghịch đảo của nó bằng với nó.
 b) Tồn tại số tự nhiên sao cho nghịch đảo của nó thuộc tập số tự nhiên.
 c) Với mọi số thực ta đều có bình phương của nó hiệu bốn lần nó và cộng thêm 8 lớn hơn 0.
 d) Tồn tại một số nguyên mà tổng bình phương của nó với năm lần nó bé hơn hoặc bằng 0.

Bài 17. Dùng các kí hiệu \forall, \exists phát biểu các mệnh đề sau:

- a) Có một số tự nhiên khác không mà căn bậc hai của nó thuộc tập số tự nhiên khác không.
 b) Mọi số nguyên đều là số tự nhiên.
 c) Có một số tự nhiên không là số nguyên.
 d) Mọi số tự nhiên đều là số thực.
 e) Tồn tại một số thực không có nghịch đảo.

Lời giải.

- a) “ $\exists n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \in \mathbb{N}^*$ ”.
- b) “ $\forall n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ ”.
- c) “ $\exists n \in \mathbb{N}, n \notin \mathbb{Z}$ ”.
- d) “ $\forall n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R}$ ”.
- e) “ $\exists x \in \mathbb{R}$, không tồn tại $\frac{1}{x}$ ”.

Bài 18. Phủ định các mệnh đề sau:

- a) Mọi học sinh trong lớp em đều biết dùng máy tính.
- b) Có một học sinh trong lớp em chưa được leo núi.
- c) Mọi học sinh trong lớp em không biết đá bóng.
- d) Có một học sinh trong lớp em thích bóng chuyền.

Lời giải.

- a) Có một học sinh trong lớp em không biết dùng máy tính.
- b) Mọi học sinh trong lớp em đều được leo núi.
- c) Có một học sinh trong lớp em biết đá bóng.
- d) Mọi học sinh trong lớp em không thích bóng chuyền.

Bài 19. Xét xem các mệnh đề sau đúng hay sai và nêu các mệnh đề phủ định của chúng.

- a) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 7x + 15 > 0$ ”.
- b) “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 + 2x^2 + 8x + 16 = 0$ ”.
- c) “ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 2x + 3y = 5$ ”.
- d) “ $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1$ ”.

Lời giải.

a) Ta có:

$$x^2 - 7x + 15 = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot x + \frac{49}{4} + 15 - \frac{49}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy mệnh đề đúng.

Mệnh đề phủ định: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 7x + 15 \leq 0$ ”.

b) $\exists x = -2 \in \mathbb{R}, (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 16 = 0 \Rightarrow$ Mệnh đề đúng.

Mệnh đề phủ định: “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 + 2x^2 + 8x + 16 \neq 0$ ”.

c) $\exists x = 0 \in \mathbb{R}, \exists y = 0 \in \mathbb{R}, 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \neq 5 \Rightarrow$ Mệnh đề sai.

Mệnh đề phủ định: “ $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x + 3y \neq 5$ ”.

d) $\exists x = 1 \in \mathbb{R}, \exists y = 0 \in \mathbb{R}, 1^2 + 0^2 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = -1 \Rightarrow$ Mệnh đề đúng.

Mệnh đề phủ định: “ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1$ ”.

Bài 20. Tìm hai giá trị thực của x để từ mỗi câu sau ta được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

- a) $x^2 < x$.

- b) $x = 5$.
 c) $x^2 > 0$.
 d) $x > \frac{1}{x}$.

Lời giải.

- a) Với $x = \frac{1}{2}$ thì mệnh đề đúng.
 Với $x = 1$ thì mệnh đề sai.
 b) Với $x = 5$ thì mệnh đề đúng.
 Với $x = 0$ thì mệnh đề sai.
 c) Với $x = 1$ thì mệnh đề đúng.
 Với $x = 0$ thì mệnh đề sai.
 d) Với $x = 2$ thì mệnh đề đúng.
 Với $x = \frac{1}{2}$ thì mệnh đề sai.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 21. Chứng minh rằng: Nếu nhốt 25 con thỏ vào 6 cái chuồng thì sẽ có ít nhất một chuồng chứa nhiều hơn 4 con thỏ.

Lời giải. Ta định nghĩa mệnh đề Q .

Q : Ít nhất 1 chuồng chứa nhiều hơn 4 con thỏ.

Suy ra mệnh đề \bar{Q} : Tất cả các chuồng chứa ít hơn hoặc bằng 4 con thỏ.

Giả sử mệnh đề \bar{Q} đúng, tức là tất cả các chuồng chứa ít hơn hoặc bằng 4 con thỏ. Khi đó số thỏ sẽ có tối đa là $4 \cdot 6 = 24$ con, mâu thuẫn với giả thiết số thỏ là 25 con.

Suy ra mệnh đề \bar{Q} sai, do đó mệnh đề Q đúng.

Vậy nếu nhốt 25 con thỏ vào 6 cái chuồng thì sẽ có ít nhất 1 chuồng chứa nhiều hơn 4 con thỏ.

Bài 22. Cho các mệnh đề chứa biến $P(n)$: “ n là số chẵn” và $Q(n)$: “ $7n + 4$ là số chẵn”.

- a) Phát biểu và chứng minh mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow Q(n)$ ”.
 b) Phát biểu và chứng minh mệnh đề đảo của mệnh đề ở câu 1.

Lời giải.

- a) Với mọi số tự nhiên n , nếu n là số chẵn thì $3n + 4$ cũng là số chẵn.

Chứng minh:

Với mọi số tự nhiên n chẵn, ta có: $3n$ và 4 là các số chẵn. Suy ra $3n + 4$ là một số chẵn.

Vậy mệnh đề đúng.

- b) Với mọi số tự nhiên n , nếu $3n + 4$ là số chẵn thì n cũng là số chẵn.

Chứng minh:

Với mọi số tự nhiên n mà $3n + 4$ là số chẵn thì ta suy ra $3n$ là số chẵn (do 4 là số chẵn). Khi đó n là một số chẵn.

Vậy mệnh đề đảo đúng.

§2. TẬP HỢP

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Tập hợp và phần tử

- Tập hợp (gọi tắt là tập) là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.
- Ta thường dùng các chữ cái in hoa để kí hiệu cho tập hợp.
- Cho tập hợp A và phần tử x . Nếu x có mặt trong tập A ta nói x là một phần tử của tập A hay x thuộc A , kí hiệu $x \in A$ hoặc $A \ni x$. Nếu x không có mặt trong tập A ta nói x không thuộc A , kí hiệu $x \notin A$ hoặc $A \not\ni x$.

2. Cách xác định tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.
- Chỉ ra các tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

3. Tập hợp rỗng

Định nghĩa 1. Tập hợp rỗng, kí hiệu là \emptyset , là tập hợp không chứa phần tử nào.

4. Tập con. Hai tập hợp bằng nhau

- Tập hợp A gọi là tập con của tập hợp B , kí hiệu $A \subset B$ nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc B .
Với kí hiệu đó, ta có $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$
- Tập rỗng là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu là \emptyset .
Qui ước : $\emptyset \subset A$ với mọi tập hợp A .
- Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau, kí hiệu $A = B$ nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B và ngược lại.
Với định nghĩa đó, ta có $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A)$

5. Tính chất

Tính chất 1.

- $\emptyset \subset A$, với mọi A .
- $A \subset A$, với mọi A
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định tập hợp - phần tử của tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp (giải phương trình nếu cần).
- Nêu đặc trưng của tập hợp.

Ví dụ 1. Xác định tập hợp A gồm 10 số nguyên tố đầu tiên bằng phương pháp liệt kê

Lời giải.

$$A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$$

Ví dụ 2.

- a) Tập hợp A các số thực lớn hơn 1 và nhỏ hơn 3 là $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.
 b) Tập hợp S gồm các nghiệm của phương trình $x^8 + 9 = 0$ là $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^8 + 9 = 0\}$.

Ví dụ 3. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

- a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$.
 b) B là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 0 và nhỏ hơn 5.
 c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x + 2) = 0\}$.

Lời giải.

- a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
 b) $B = \{1; 2; 3; 4\}$.
 c) Ta có $(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$
 Mà $x \in \mathbb{R}$ nên $C = \{-2; 1\}$.

Ví dụ 4. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

- a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x^2 - 3x + 1)(x + 5) = 0\}$.
 b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$.

Lời giải.

- a) Ta có:
 $(2x^2 - 3x + 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -5. \end{cases}$
 Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $A = \{1; -5\}$.
 b) Ta có:
 $(x^2 - 2)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$
 Vì $x \in \mathbb{Q}$ nên $B = \{1; 2\}$.

Ví dụ 5. Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê:

- a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 5) = 0\}$.
 b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < n^2 < 40\}$.
 c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 9\}$.
 d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| = 5\}$.

Lời giải.

- a) $A = \{1\}$.
 b) $B = \{3; 4; 5; 6\}$.
 c) $C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
 d) Ta có $|2x + 1| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$.
 Vậy $C = \{2; -3\}$.

Ví dụ 6. Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau:

- a) Tập hợp A các số chính phương không vượt quá 50.
 b) Tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n(n + 1) \leq 30\}$.

Lời giải.

$$A = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49\}$$

$$B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Ví dụ 7. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

- a) $A = \{0; 4; 8; 12; 16; \dots; 52\}$.
 b) $B = \{3; 6; 9; 12; 15; \dots; 51\}$.
 c) $C = \{2; 5; 8; 11; 14; \dots; 62\}$.

Lời giải.

- a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 16 \text{ và } x : 4\}$.
 b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 51 \text{ và } x : 3\}$.
 c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 62 \text{ và } (x - 2) : 3\}$.

Ví dụ 8. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

a) $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$.

b) $B = \{-2; 4; -8; 16; -32; 64\}$.

Lời giải.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 17 \text{ và } x \text{ là số nguyên tố}\}$.

b) $B = \{x = (-2)^n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 6\}$.

Ví dụ 9. Tìm một tính chất đặc trưng xác định các phần tử của mỗi tập hợp sau

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$B = \{0; 7; 14; 21; 28\}$$

Lời giải.

$$A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 9\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 7 \text{ và } x \leq 28\}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. A là tập hợp các số nguyên tố nhỏ hơn 20. Liệt kê các phần tử của tập hợp A .

Lời giải. $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$.

Bài 2. Cho tập hợp $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$ Hãy xác định tập hợp A bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

Lời giải. A là tập hợp các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn hoặc bằng 10.

Bài 3. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 8\}$. Liệt kê các phần tử của tập hợp A .

Lời giải. $A = \{1; 2; 4; 8\}$.

Bài 4. Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là ước của } 15\}$. Liệt kê các phần tử của tập hợp A .

Lời giải. $A = \{-15; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 15\}$.

Bài 5. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước chung của } 30 \text{ và } 20\}$.

Lời giải. $A = \{1; 2; 5; 10\}$.

Bài 6. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của } 15 \text{ và } 20, x \leq 60\}$.

Lời giải. $A = \{0; 30; 60\}$.

Bài 7. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

b) $B = \{0; 2; 4; 5; 6; 8\}$.

Lời giải.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 6\}$.

b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x : 2 \text{ và } x \leq 8\right\}$.

Bài 8. Tìm một tính chất đặc trưng xác định các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{0; 2; 7; 14; 23; 34; 47\}$

b) $B = \{-1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\}$

Lời giải.

$$A = \{n^2 - 2 \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 7\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 2 = 0\}$$

Bài 9. Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 8\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < |x| < \frac{21}{4}\}$

Lời giải.

$$A = \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

$$B = \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$$

Bài 10. Cho tập hợp $X = \{n \in \mathbb{N} \mid -5 < 5n + 2 < 303\}$. Tìm số phần tử của tập hợp X .

Lời giải. $-5 < 5n + 2 < 303 \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 60$. Vậy số phần tử của tập hợp X là 62.

Bài 11. Liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4x)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0\}$.

Lời giải. Ta có $(x^2 - 4x)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ x^4 - 6x^2 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 4 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$.

Từ đó ta có $A = \{0; -1; 1; 4\}$ chứa 4 phần tử.

Dạng 2. Tập hợp rỗng

Ví dụ 1. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 1 = 0\}.$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}.$$

Lời giải. Các tập hợp rỗng là A, B .

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của m để các tập hợp sau là tập hợp rỗng.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < m \text{ và } x > 2m + 1\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m = 0\}$

Lời giải.

a) Để A là tập rỗng thì $m \geq 2m + 1 \Leftrightarrow m \leq -1$.

b) Để B là tập rỗng thì phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ phải vô nghiệm, tức là $\Delta' = 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - \sqrt{2} = 0\}.$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - \frac{1}{4} = 0\right\}.$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 0\}.$$

Lời giải. Tập hợp A, B .

Bài 2. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = m\}$. Tìm m để $A = \emptyset$.

Lời giải. Để $A = \emptyset$ thì $m \notin \mathbb{N}$.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để các tập hợp sau là tập hợp rỗng.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < m + 3 \text{ và } x > 4m + 3\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m + 9 = 0\}$

Lời giải.

a) Để A là tập rỗng thì $m + 3 \geq 4m + 3 \Leftrightarrow m \leq 0$. Vậy m thuộc tập hợp các số nguyên không dương.

b) Để B là tập rỗng thì phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ phải vô nghiệm, tức là $\Delta' = -8 - m < 0 \Leftrightarrow m > -8$.
 Vậy m thuộc tập hợp các số nguyên lớn hơn -8 .

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Viết tập hợp sau dưới dạng liệt kê các phần tử.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 3\}$.

Lời giải.

a) $A = \{1; 2; -1\}$.

b) $B = \{0; 1; 2\}$.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của m để tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < m\}$ là tập hợp rỗng.

Lời giải. Để $A = \emptyset$ thì $m \leq 0$.

Bài 3. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x - m < 3\}$. Tìm tất cả các giá trị của m để $A = \{1\}$.

Lời giải. Để $A = \{1\}$ thì $1 - m = 2 \Leftrightarrow m = -1$.

Bài 4. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -4 < x < 3\}$. Liệt kê tất cả các phần tử của A .

Lời giải. Ta có $A = \{0; 1; 2\}$.

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị của m để $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x - m < 3\}$ là tập hợp rỗng.

Lời giải. Ta có $A = (m + 1; m + 3) \cap \mathbb{N}$. Do đó, $A = \emptyset \Leftrightarrow m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$.

Bài 6. Cho tập hợp $A = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}, \text{ với } a, b, c \text{ là các số thực dương}\right\}$. Tìm số nhỏ nhất của tập hợp A .

Lời giải. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq 1$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Vậy số nhỏ nhất là 1.

Dạng 3. Tập con. Tập bằng nhau

- Tập hợp A là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của A đều có trong B .
 $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- $\emptyset \subset A$, với mọi tập hợp A .
- $A \subset A$, với mọi tập hợp A .
- Có tập A gồm có n phần tử ($n \in \mathbb{N}$). Khi đó, tập A có 2^n tập con.
- $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$.

Ví dụ 1. Tìm tất cả các tập con của tập $A = \{a, 1, 2\}$.

Lời giải. Tập A có $2^3 = 8$ tập con.

- 0 phần tử: \emptyset .
- 1 phần tử: $\{a\}, \{1\}, \{2\}$.
- 2 phần tử: $\{a, 1\}, \{a, 2\}, \{1, 2\}$.
- 3 phần tử: $\{a, 1, 2\}$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các tập con có 2 phần tử của tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Lời giải. $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}$.

Ví dụ 3. Xác định tập hợp X biết $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 5\}$.

Lời giải. Ta có

- Vì $\{1, 2\} \subset X$ nên tập hợp X có chứa các phần tử 1, 2.
- Vì $X \subset \{1, 2, 5\}$ nên các phần tử của tập hợp X có thể là 1, 2, 5.

Khi đó tập hợp X có thể là $\{1, 2\}, \{1, 2, 5\}$.

Ví dụ 4. Xác định tập hợp X biết $\{a, 1\} \subset X \subset \{a, b, 1, 2\}$.

Lời giải. Ta có

- Vì $\{a, 1\} \subset X$ nên tập hợp X có chứa 2 phần tử là $a, 1$.
- Vì $X \subset \{a, b, 1, 2\}$ nên các phần tử của tập hợp X có thể là $a, b, 1, 2$.

Suy ra, tập hợp X có 2 phần tử, 3 phần tử hoặc 4 phần tử.

Khi đó, tập hợp X có thể là $\{a, 1\}, \{a, 1, 2\}, \{a, b, 1\}, \{a, b, 2\}, \{a, b, 1, 2\}$.

Ví dụ 5. Cho ba tập hợp $A = \{2; 5\}$, $B = \{x; 5\}$ và $C = \{x; y; 5\}$. Tìm các giá trị của x, y sao cho $A = B = C$.

Lời giải. $A = B \Leftrightarrow x = 2$.

Khi $x = 2$, ta có $C = \{2; y; 5\}$. Khi đó, ta có $\{2; y; 5\} \subset \{2; 5\}$ và $\{2; y; 5\} \supset \{2; 5\}$. Từ đây, suy ra $y = 2$ hoặc $y = 5$.

Vậy $(x; y) = (2; 2)$ hoặc $(x; y) = (2; 5)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 3 \text{ và } 2\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 6\}$. Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải. Trước hết, ta cần chứng minh $A \subset B$. Thật vậy, với $x \in A$ bất kì, ta luôn có x chia hết cho 2 và x chia hết cho 3. Vì 2, 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên x chia hết cho 6. Suy ra, $x \in B$.

Mặt khác, vì $6 = 2.3$ nên với phần tử $x \in B$ bất kì, ta luôn có x chia hết cho 2 và 3. Suy ra, $x \in A$. Do đó, $B \subset A$.

Ví dụ 7. Cho biết x là một phần tử của tập hợp A , xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $x \in A$. b) $\{x\} \in A$. c) $x \subset A$. d) $\{x\} \subset A$.

Lời giải.

- a) $x \in A$: đúng.
 b) $\{x\} \in A$: sai về quan hệ giữa hai tập hợp.
 c) $x \subset A$: sai về quan hệ giữa phần tử và tập hợp.
 d) $\{x\} \subset A$: đúng.

Ví dụ 8. Xác định tất cả các tập hợp con của mỗi tập hợp

- a) $A = \{x; y\}$. b) $B = \{1; 2; 3\}$

Lời giải.

- a) Các tập hợp con của tập hợp $A = \{x; y\}$ là: \emptyset ; $\{x\}$; $\{y\}$; $\{x; y\}$.
 b) Các tập hợp con của tập hợp $B = \{1; 2; 3\}$ là: \emptyset ; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{1; 2\}$; $\{1; 3\}$; $\{2; 3\}$ và $\{1; 2; 3\}$.

Ví dụ 9. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm tất cả các tập con có 3 phần tử của tập hợp A sao cho tổng các phần tử này là một số lẻ.

Lời giải. Để tổng của ba số nguyên là một số lẻ thì trong ba số chỉ có một số lẻ hoặc cả ba số đều lẻ. Nói cách khác tập con này của A phải có một số lẻ hoặc ba số lẻ.

Chỉ có một tập con gồm ba số lẻ của A là $\{1; 3; 5\}$. Các tập con gồm ba số của A trong đó có một số lẻ là: $\{1; 2; 4\}$; $\{1; 2; 6\}$; $\{1; 4; 6\}$; $\{3; 2; 4\}$; $\{3; 2; 6\}$; $\{3; 4; 6\}$; $\{5; 2; 4\}$; $\{5; 2; 6\}$; $\{5; 4; 6\}$.

Ví dụ 10. Trong hai tập hợp A và B dưới đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?

- a) A là tập hợp các hình chữ nhật
 B là tập hợp các hình bình hành.
 b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước chung của } 12 \text{ và } 18\}$
 $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước của } 6\}$

Lời giải.

- a) Tất cả các hình chữ nhật đều là hình bình hành nên $A \subset B$.
- b) $A = \{1; 2; 3; 6\}$. $B = \{1; 2; 3; 6\}$
Rõ ràng ta thấy $A \subset B$ và $B \subset A$ nên $A = B$.

Ví dụ 11. Cho $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là ước của } 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x - 2)(x - 4) = 0\}$. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \subset X \subset B$.

Lời giải. Liệt kê các phần tử của tập hợp A và B ta được :

$$A = \{1; 2\}; B = \{-1; 1; 2; 4\}.$$

Muốn tìm tập X thỏa điều kiện $A \subset X \subset B$ đầu tiên ta lấy $X = A$, sau đó ghép thêm các phần tử thuộc B mà không thuộc A . Với cách thực hiện như trên, ta có các tập hợp X thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $X = A = \{1; 2\}$, rồi ghép thêm vào một phần tử ta được: $\{-1; 1; 2\}; \{4; 1; 2\}$

Ghép thêm vào A hai trong bốn phần tử còn lại của B ta được : $X = B = \{-1; 1; 2; 4\}$

Ví dụ 12. Cho $A = \{8k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng $A \subset B$.

Lời giải. Ta cần chứng minh mọi phần tử của A đều thuộc B .

Giả sử $x \in A, x = 8k + 3$.

Khi đó ta có thể viết $x = 8k + 2 + 1 = 2(4k + 1) + 1$.

Đặt $l = 4k + 1$, x được viết thành $x = 2l + 1$. Vậy $x \in B$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả các tập con của mỗi tập hợp sau:

- a) $A = \{1; 2\}$. b) $B = \{a; b; c\}$.

Lời giải.

a) Các tập hợp con của tập hợp $A = \{1; 2\}$ là: $\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}$.

b) Các tập hợp con của tập hợp $B = \{a; b; c\}$ là: $\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}$; và $\{a; b; c\}$.

Bài 2. Cho các tập hợp

$$A = \{2; 3; 5\}; \quad B = \{-4; 0; 2; 3; 5; 6; 8\}; \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 = 0\}$$

Hãy xác định xem tập nào là tập con của tập còn lại.

Lời giải. Ta có $x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow C = \{2; 5\}$. Vậy $C \subset A \subset B$.

Bài 3. Cho hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x - 2)(x - 4) = 0\}; \quad B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước của } 4\}.$$

Hai tập hợp A và B , tập hợp nào là tập con của tập còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?

Lời giải. Ta có $A = \{1; 2; 4\}$; $B = \{1; 2; 4\}$. Ta thấy $A \subset B$; $B \subset A$, nên $A = B$

Bài 4. Cho các tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0 \text{ hoặc } 3x^2 - 10x + 8 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 = 0 \text{ và } 2x^2 - 7x + 6 = 0\}.$$

- a) Viết tập hợp A, B bằng cách liệt kê các phần tử của nó.

b) Tìm tất cả các tập X sao cho $B \subset X$ và $X \subset A$.

Lời giải. Ta giải các phương trình:

$$\begin{aligned}x^2 + x - 6 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \\3x^2 - 10x + 8 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \\x^2 - x - 2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \\2x^2 - 7x + 6 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.\end{aligned}$$

a) $A = \left\{2; -3; \frac{4}{3}\right\}; B = \{2\}$.

b) X là những tập hợp sau: $\{2\}; \{2; -3\}; \left\{2; \frac{4}{3}\right\}; \left\{2; -3; \frac{4}{3}\right\}$.

Bài 5. Tìm tập hợp

a) có đúng một tập con.

b) có đúng hai tập con.

Lời giải.

a) Tập hợp có đúng một tập con là \emptyset .

b) Tập $A = \{a\}$. A có đúng hai tập con là A và \emptyset .

Bài 6. Cho hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 3 \text{ và } 4\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 12\}.$$

Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải. Giả sử $x \in B$, khi đó x chia hết cho 12, suy ra x chia hết cho 3 và x chia hết cho 4, suy ra $x \in A$, do đó $B \subset A$.

Giả sử $x \in A$, khi đó x chia hết cho 3 và x chia hết cho 4, mà 3 và 4 nguyên tố cùng nhau nên suy ra x chia hết cho $3 \cdot 4$, hay x chia hết cho 12, suy ra $x \in B$, do đó $A \subset B$.

Vậy $A = B$.

Bài 7. Gọi A là tập hợp các tam giác đều, B là tập hợp các tam giác có góc 60° , C là tập hợp các tam giác cân, D là tập hợp các tam giác vuông có góc 30° . Hãy nêu mối quan hệ giữa các tập hợp trên.

Lời giải. Vì tam giác đều là tam giác có ba góc bằng 60° nên $A \subset B$. Tam giác đều cũng là tam giác cân nên $A \subset C$. Tam giác vuông có góc 30° thì góc còn lại là 60° nên $D \subset B$.

Bài 8. Cho $A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}; B = \{6k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

a) Chứng minh rằng $2 \in A, 7 \notin B$. Số 18 có thuộc tập A không?

b) Chứng minh rằng $B \subset A$.

Lời giải.

- a) Ta có $2 = 2 + 3 \cdot 0 \Rightarrow 2 \in A$. Ta thấy $x \in B$ thì x có dạng $x = 6k + 2$ chia hết cho 2 nên $-7 \notin B$.
Giả sử số $18 \in A \Rightarrow 18 = 3k + 2 \Rightarrow k = \frac{16}{3}$ (vô lý) vì $k \in \mathbb{Z}$. Vậy $18 \notin A$.
- b) Xét $x \in B$. Ta có $x = 2 + 6k$ với $k \in \mathbb{Z}$. Suy ra $x = 2 + 3(2k)$. Do $2k \in \mathbb{Z}$ nên $x \in A$. Vậy $B \subset A$.

Bài 9. Tìm tất cả các tập con của tập hợp $B = \{a, b, 2, 5\}$.

Lời giải. Vì tập hợp B có 4 phần tử nên tập B có $2^4 = 16$ tập con.

- 0 phần tử: \emptyset .
- 1 phần tử: $\{a\}, \{b\}, \{2\}, \{5\}$.
- 2 phần tử: $\{a, b\}, \{a, 2\}, \{a, 5\}, \{b, 2\}, \{b, 5\}, \{2, 5\}$.
- 3 phần tử: $\{a, b, 2\}, \{a, b, 5\}, \{a, 5, 2\}, \{5, b, 2\}$.
- 4 phần tử: $\{a, b, 2, 5\}$

Bài 10. Tìm tất cả các tập con có 3 phần tử của tập hợp $D = \{2, 3, 4, 6, 7\}$.

Lời giải. $\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 6, 7\}, \{4, 6, 7\}$.

Bài 11. Xác định tập hợp X biết $\{a\} \subset X \subset \{a, 3, 4\}$.

Lời giải. Tập hợp X có thể là $\{a\}, \{a, 3\}, \{a, 4\}, \{a, 3, 4\}$.

Bài 12. Xác định tập hợp X biết $\{a, 9\} \subset X \subset \{a, b, 7, 8, 9\}$ và tập hợp X có 3 phần tử.

Lời giải. Tập hợp X có thể là $\{a, 9, b\}, \{a, 7, 9\}, \{a, 8, 9\}$.

Bài 13. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 2 \text{ và } 5\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ có chữ số tận cùng bằng } 0\}$. Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải. Trước hết, ta cần chứng minh $A \subset B$. Thật vậy, với $x \in A$ bất kì, ta luôn có x chia hết cho 2 và x chia hết cho 5. Vì 2, 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên x chia hết cho 10. Suy ra, $x \in B$.

Mặt khác, với phần tử $x \in B$ bất kì, vì x có chữ số tận cùng là 0 nên x chia hết cho 2 và 5. Suy ra, $x \in A$. Do đó, $B \subset A$.

Bài 14. Tìm giá trị các tham số m và n sao cho $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - mx^2 + nx - 1 = 0\} = \{1; 2\}$.

Lời giải. Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - mx^2 + nx - 1 = 0\}$ và $B = \{1; 2\}$.

Vì $1 \in A$ nên $-m + n = 0$.

Vì $2 \in A$ nên $-4m + 2n = -7$.

Từ đây, ta có hệ phương trình $m = n = \frac{7}{2}$.

Ngược lại, với $m = n = \frac{7}{2}$, ta có $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0\} = \{1; 2\} = B$.

Bài 15. Cho A là tập hợp tất cả các tứ giác lồi, B là tập hợp tất cả các hình thang, C là tập hợp tất cả các hình bình hành, D là tập hợp tất cả các hình chữ nhật. Xác định mối quan hệ giữa các tập hợp đã cho.

Lời giải. $D \subset C \subset B \subset A$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho các tập hợp

$$A = \{1; 2\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}.$$

Hãy xác định mối quan hệ giữa các tập hợp trên.

Lời giải. Ta có $B = \{1; 2\}$; $C = \{0; 1; 2\}$ Vậy $A \subset C$; $B \subset C$; $A = B$.

Bài 2. Cho A là tập hợp các số nguyên chia cho 3 dư 2, B là tập hợp các số nguyên chia cho 6 dư 2 hoặc dư 5. Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải. Ta chứng minh mọi phần tử của A đều là phần tử của B và ngược lại.

Trước hết ta thấy rằng một số chia hết cho 3 thì chia cho 6 dư 0 hoặc dư 3 nên một số chia cho 3 dư 2 thì chia cho 6 dư 2 hoặc dư 5. Tức là nếu $x \in A, x = 3k + 2$ thì x có thể viết thành $x = 6l + 2$ hoặc $x = 6l + 5$ hay $x \in B$. Ngược lại, $x \in B$ xét hai trường hợp:

- Nếu $x = 6k + 2 = 3(2k) + 2$. Đặt $l = 2k \Rightarrow x = 3l + 2 \Rightarrow x \in A$
- Nếu $x = 6k + 5 = 3(2k + 1) + 2$. Đặt $l = 2k + 1 \Rightarrow x = 3l + 2 \Rightarrow x \in A$

Vậy $A \subset B$ và $B \subset A$ nên $A = B$ (điều phải chứng minh).

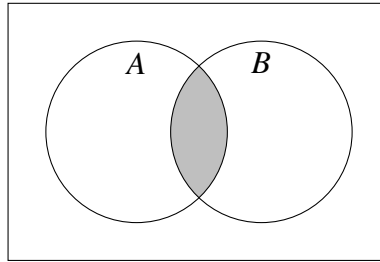
§3. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Giao của hai tập hợp

Định nghĩa 1. Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc tập hợp A , vừa thuộc tập hợp B được gọi là giao của A và B . Kí hiệu $C = A \cap B$.

Vậy $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$.

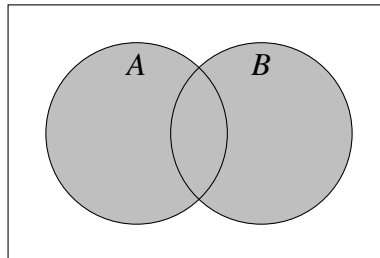


$$\triangle x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$$

2. Hợp của hai tập hợp

Định nghĩa 2. Tập hợp C gồm các phần tử thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B được gọi là hợp của A và B . Kí hiệu $C = A \cup B$.

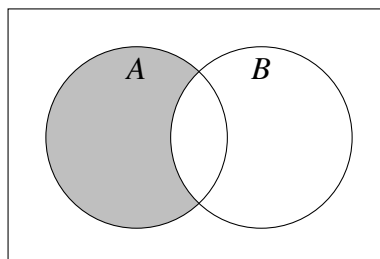
$A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.



$$\triangle x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$$

3. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$.



- Phép lấy phần bù: Cho $A \subset E$. Phần bù của A trong E là $\mathcal{C}_E A = E \setminus A$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Tìm giao và hợp của các tập hợp

Dựa vào định nghĩa giao và hợp của hai tập hợp để tìm kết quả.

Ví dụ 1. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ là ước số của } 12\}$. Tìm $A \cap B$ và $A \cup B$.

Lời giải. Ta có: $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$. Vậy: $A \cap B = \{1; 2; 3\}$ và $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 12\}$.

Ví dụ 2. Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{Z} | -4 < x \leq 4\}$ và $C = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq a\}$. Tìm số nguyên a để tập hợp $B \cap C = \emptyset$.

Lời giải. Ta có $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, $C = \{\dots, a-1, a\}$.
Để $B \cap C = \emptyset$ thì $a \leq -4$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$.

Lời giải.

- $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$, suy ra $A \cap B \subset A$.
- $x \in A \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \text{ (do } A \subset B) \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap B$, suy ra $A \subset A \cap B$.
Vậy $A \cap B = A$.

Ví dụ 4. Cho A là tập hợp học sinh lớp 12 của trường Buôn Ma Thuột và B là tập hợp học sinh của trường Buôn Ma Thuột dự kiến sẽ lựa chọn thi khối A vào các trường đại học. Hãy mô tả các học sinh thuộc tập hợp sau

a) $A \cap B$.

b) $A \cup B$.

Lời giải.

- a) $A \cap B$ là tập hợp các học sinh lớp 12 thi khối A của trường Buôn Ma Thuột.
b) $A \cup B$ là tập hợp các học sinh hoặc lớp 12 hoặc chọn thi khối A của trường Buôn Ma Thuột.

Ví dụ 5. Cho hai tập hợp A, B biết: $A = \{a; b\}$, $B = \{a; b; c; d\}$. Tìm tập hợp X sao cho $A \cup X = B$.

Lời giải. $X = \{c; d\}; \{b; c; d\}; \{a; c; d\}; \{a; b; c; d\}$.

Ví dụ 6. Xác định tập hợp $A \cap B$ biết

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 3\}, B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 7\}.$$

Lời giải. Ta có $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 3 \text{ và bội của } 7\} = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 21\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai tập hợp A và B . Tìm $A \cap B, A \cup B$ biết

a) $A = \{x|x \text{ là ước nguyên dương của } 12\}$ và $B = \{x|x \text{ là ước nguyên dương của } 18\}$.

b) $A = \{x|x \text{ là ước nguyên dương của } 27\}$ và $B = \{x|x \text{ là ước nguyên dương của } 15\}$.

Lời giải.

$$\text{a) } A = \{1; 2; 4; 6; 12\}, B = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\} \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = \{1; 2; 6\} \\ A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18\} \end{cases}$$

$$\text{b) } A = \{1; 3; 9; 27\}, B = \{1; 3; 5; 15\} \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = \{1; 3\} \\ A \cup B = \{1; 3; 5; 9; 15; 27\} \end{cases}$$

Bài 2. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10, $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 6\}$ và $C = \{n \in \mathbb{N} | 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm $A \cap (B \cup C)$.

Lời giải. Ta có $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$; $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ và $C = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
 $B \cup C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ nên $A \cap (B \cup C) = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$

Bài 3. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $B = \{0; 2; 4\}$. Xác định $A \cap B, A \cup B$.

Lời giải. Ta có $A \cap B = \{2; 4\}$ và $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Bài 4. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | 3 < n^2 < 30\}$. Tìm $A \cap B$.

Lời giải. Ta có: $A = \left\{0; 2; -\frac{1}{2}\right\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$ nên $A \cap B = \{2\}$.

Bài 5. Cho a là số nguyên. Tìm a để giao của hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq a\}, B = \left\{x \in \mathbb{Z} | x > \frac{3a-4}{2}\right\}$$

bằng rỗng.

Lời giải. Ta có $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow a \leq \frac{3a-4}{2} \Leftrightarrow a \geq 4$.

Bài 6. Cho hai tập hợp bất kì A, B . Chứng minh rằng $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Lời giải.

- Nếu $A = B$ thì $A \cap B = A, A \cup B = A$ nên $A \cup B = A \cap B$.
- Ngược lại, giả sử $A \cup B = A \cap B$. Lấy một phần tử bất kì $x \in A$ ta suy ra $x \in A \cup B$. Vì $A \cup B = A \cap B$ nên $x \in A \cap B$. Từ đó suy ra $x \in B$ nên $A \subset B$. Tương tự ta cũng có $B \subset A$. Vậy $A = B$.

Bài 7. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 8\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 5\}$. Tìm $A \cap B; A \cup B$.

Lời giải. Ta có $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$; $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vậy $A \cap B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ và $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Bài 8. Tìm điều kiện cần và đủ để hợp của hai tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} | n < a\}$ và $B = \{m \in \mathbb{Z} | m > 2a + 1\}$ bằng \mathbb{Z} .

Lời giải. Ta có $A \cup B = \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2a + 1 < a \Leftrightarrow a < -1$.

Bài 9. Cho tập $A = \{0; 1; 2\}$ và tập $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Tìm tập C sao cho $A \cup C = B$.

Lời giải. Đầu tiên ta tìm tập C có số phần tử ít nhất thỏa yêu cầu bài toán đó là tập $C_0 = B \setminus A = \{3; 4\}$. Kế tiếp ta ghép các phần tử của tập A vào. Vậy các tập cần tìm là

$$C_1 = \{3; 4; 0\}, C_2 = \{3; 4; 1\}, C_3 = \{3; 4; 2\},$$

$$C_4 = \{3; 4; 0; 1\}, C_5 = \{3; 4; 0; 2\}, C_6 = \{3; 4; 1; 2\}, C_7 = \{3; 4; 0; 1; 2\}.$$

Tổng cộng có 8 tập thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 10. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| > 2\}$. Tìm $A \cap B$.

Lời giải. Ta có $|x-1| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-1 < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 5$, $A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Lại có $|x-1| > 2 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 3$, $B = \{\dots; -3; -2; 4; 5; 6; \dots\}$ nên $A \cap B = \{-2; 4\}$.

Bài 11. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2m-1 < x < 2m+3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2\}$. Tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải. Ta có $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 2\} = \{-1; 0; 1\}$ và $A = \{2m, \dots, 2m+2\}$.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2 \leq -2 \\ 2m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases}$$

Bài 12. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$ và tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \text{ là số nguyên tố } n \leq 5\}$. Xác định tập hợp $A \cap B$ và $A \cup B$.

Lời giải. $A = \{0; 1; 2; 3\}$ và $B = \{2; 3; 5\}$. Khi đó $A \cap B = \{2; 3\}$ và $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 5\}$.

Bài 13. Cho tập $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm các tập con A, B của tập S sao cho $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$ và $A \cap B = \{1; 2\}$.

Lời giải.

- A có hai phần tử $A = \{1; 2\} \Rightarrow B = \{1; 2; 3; 4\}$.
- A có ba phần tử $A = \{1; 2; 3\} \Rightarrow B = \{1; 2; 4\}$.
- A có ba phần tử $A = \{1; 2; 4\} \Rightarrow B = \{1; 2; 3\}$.
- A có bốn phần tử $A = \{1; 2; 3; 4\} \Rightarrow B = \{1; 2\}$.

Vậy ta có 4 cặp tập A, B thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 14. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + m + 2 = 0\}$ và tập hợp $B = \{1; 2\}$. Tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải.

- TH1: $A = \emptyset$ tương đương pt: $x^2 - 4x + m + 2 = 0$ vô nghiệm, tức là $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 2$.
- TH2: $A \neq \emptyset$ tương đương pt: $x^2 - 4x + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm khác 1, 2 $\Leftrightarrow m \neq 1; m \neq 2; m \leq 2$.
- Vậy kết hợp lại ta có $m \neq 1; m \neq 2$.

Dạng 2. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

Dựa vào định nghĩa hiệu và phần bù của hai tập hợp để tìm kết quả.

⚠ *Chú ý*

- Nếu $A \subset B$ thì $B \setminus A = C_B A$.
- Nếu $A = \emptyset$ thì $A \setminus B = \emptyset$ với mọi tập hợp B .

Ví dụ 7. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Tìm các tập hợp $A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải. Các phần tử 2, 4 thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập hợp B nên $A \setminus B = \{2, 4\}$.

Chỉ có phần tử 7 thuộc tập hợp B nhưng không thuộc tập hợp A nên $B \setminus A = \{7\}$

Ví dụ 8. Cho A là tập hợp các tự nhiên lẻ. Tìm phần bù của A trong tập \mathbb{N} các số tự nhiên.

Lời giải. Các số tự nhiên chẵn thuộc tập hợp \mathbb{N} nhưng không thuộc tập hợp A nên phần bù của A trong \mathbb{N} là tập hợp các số tự nhiên chẵn. Do đó $C_{\mathbb{N}} A = \{2k/k \in \mathbb{N}\}$.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng $A \setminus B = \emptyset$ thì $A \subset B$.

Lời giải. Lấy $x \in A$. Nếu $x \notin B$ thì $x \in A \setminus B$ (mâu thuẫn). Do đó $x \in B$. Vậy $A \subset B$.

Ví dụ 10. Cho các tập hợp $A = \{4, 5\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq a\}$ với a là số tự nhiên. Tìm a sao cho $A \setminus B = A$.

Lời giải. Ta có $B = \{0, 1, \dots, a\}$. Để $A \setminus B = A$ thì các phần tử của A không thuộc B . Suy ra $a \leq 3$. Vậy $a \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Ví dụ 11. Cho hai tập hợp A, B . Biết $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{3\}$ và $B = \{3, 4, 5\}$. Tìm tập hợp A .

Lời giải. Ta có $A \setminus B = \{1, 2\}$ nên $1, 2 \in A$.
Mà $B \setminus A = \{3\}$ nên $3 \notin A$ và $4, 5 \in A$.
Suy ra $A = \{1, 2, 4, 5\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Cho A là tập hợp các học sinh của một lớp và B là tập hợp các học sinh giỏi Toán của lớp. Hãy mô tả tập hợp $C_A B$.

Lời giải. $C_A B$ là tập hợp các học sinh không giỏi Toán của lớp.

Bài 16. Cho A là tập hợp các ước nguyên dương của 12 và B là tập hợp các ước nguyên dương của 18. Tìm các tập hợp $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

Lời giải. Ta có $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ và $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ nên $A \setminus B = \{4, 12\}$, $B \setminus A = \{9, 18\}$.

Bài 17. Chứng minh rằng $A \setminus B = B \setminus A$ thì $A = B$.

Lời giải. Lấy $x \in A \setminus B = B \setminus A$ thì $x \in A, x \notin B$ và $x \in B, x \notin A$. Suy ra $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$.
Suy ra $A \subset B$ và $B \subset A$. Vậy $A = B$.

Bài 18. Cho hai tập hợp A, B . Biết $A \setminus B = \{a, b, c\}$, $B \setminus A = \{d, e\}$ và $B = \{d, e, f\}$. Tìm tập hợp A .

Lời giải. $A = \{a, b, c, f\}$.

Bài 19. Cho các tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} | 2 < n \leq 7\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq a\}$ với a là số tự nhiên. Tìm a sao cho:

a) $A \setminus B = A$.

b) $A \setminus B = \emptyset$.

Lời giải. $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, \dots, a\}$.

a) Ta có $A \setminus B = A$ khi mọi phần tử của A đều không thuộc B . Suy ra $a \leq 2$. Vậy $a \in \{0, 1, 2\}$.

b) Ta có $A \setminus B = \emptyset$ khi $A \subset B$. Suy ra $a \geq 7$.

Bài 20. Cho hai tập hợp $A = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\}$ và $B = \{3k | k \in \mathbb{N}\}$. Tìm tập hợp $B \setminus A$.

Lời giải. $B \setminus A = \{6k | k \in \mathbb{N}\}$.

Dạng 3. Sử dụng biểu đồ Ven và công thức tính số phần tử của tập hợp $A \cup B$ để giải toán

• Phương pháp biểu đồ Ven:

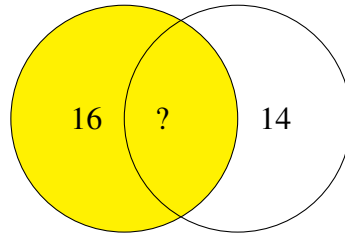
- Sử dụng các hình tròn giao nhau để mô tả các đại lượng và mối quan hệ giữa chúng.
- Biểu đồ Ven cho ta cách nhìn trực quan và mối quan hệ giữa các đại lượng từ đó tìm ra các yếu tố chưa biết.

• Công thức số phần tử $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Ví dụ 12. Trong năm vừa qua, trường THPT A có 25 bạn thi học sinh giỏi 2 môn Văn và Toán. Trong đó có 14 bạn thi Toán và 16 bạn thi Văn. Hỏi trường có bao nhiêu bạn thi cả 2 môn Văn và Toán.

Lời giải.

Cách 1: Sử dụng sơ đồ Ven như hình vẽ



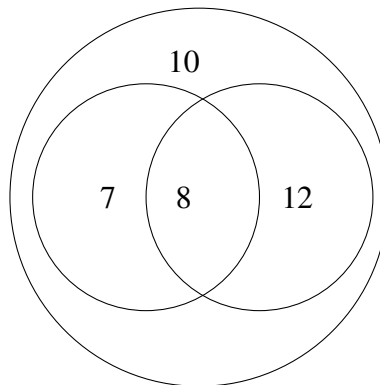
- Ta thấy Số bạn thi toán mà không thi văn là $25 - 16 = 9$ (bạn).

- Số bạn thi cả 2 môn (phần giao nhau) là $14 - 9 = 5$ (bạn).

Cách 2: Gọi A, B lần lượt là tập hợp các bạn thi học sinh giỏi Toán và Văn. Ta có $|A| = 14$, $|B| = 16$, $|A \cup B| = 25$. Theo công thức ta có $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 14 + 16 - 25 = 5$ (bạn).

Ví dụ 13. Lớp 10A có 15 bạn thích môn Văn, 20 bạn thích môn Toán. Trong số các bạn thích văn hoặc toán có 8 bạn thích cả 2 môn. Trong lớp vẫn còn 10 bạn không thích môn nào trong 2 môn Văn và Toán. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn.

Lời giải. Ta sử dụng sơ đồ Ven để giải bài toán.



- Hình tròn to thể hiện số học sinh cả lớp.

Như vậy, ta có:

- Số bạn chỉ thích Văn là $15 - 8 = 7$ (bạn).

- Số bạn chỉ thích Toán là $20 - 8 = 12$ (bạn).

- Số học sinh cả lớp là tổng các phần không giao nhau: $7 + 8 + 12 + 10 = 37$.

Ví dụ 14. Mỗi học sinh của lớp 10A đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả 2 môn thể thao. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh.

Lời giải. Ngoài sơ đồ Ven ta có thể dùng công thức số phần tử. Gọi A là tập hợp các học sinh chơi bóng đá, B là tập các học sinh chơi bóng chuyền. Do đó $A \cap B$ là tập các học sinh chơi cả hai môn. Ta có

$$|A| = 25, |B| = 20, |A \cap B| = 10.$$

Số học sinh cả lớp là số phần tử của tập $A \cup B$. Theo công thức ta có $|A \cup B| = 25 + 20 - 10 = 35$ (học sinh).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 21. Một lớp có 40 học sinh, mỗi học sinh đều đăng ký chơi ít nhất 1 trong 2 môn thể thao là bóng đá hoặc cầu lông. Có 30 học sinh có đăng ký môn bóng đá, 25 học sinh có đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả 2 môn.

Lời giải. Số học sinh đăng ký cả hai môn là $30 + 25 - 40 = 15$ (học sinh).

Bài 22. Ổ xứ sở của thần Thoại ngoài các vị thần thì còn có các sinh vật gồm 27 con người, 311 con yêu quái một mắt, 205 con yêu quái tóc răn và yêu quái vừa một mắt vừa tóc răn. Tìm số yêu quái vừa một mắt vừa tóc răn biết có tổng số sinh vật là 500 con.

Lời giải.

- Số sinh vật không phải con người là $500 - 27 = 473$ (con).
- Gọi A, B lần lượt là tập hợp yêu quái một mắt và yêu quái tóc răn. Khi đó $|A| = 311$, $|B| = 205$, $|A \cup B| = 473$.
- Vậy số yêu quái vừa một mắt vừa tóc răn là $|A \cap B| = 311 + 205 - 473 = 43$ (con).

Bài 23. Trong 45 học sinh lớp 10A có 20 bạn xếp học lực giỏi, 15 bạn đạt hạnh kiểm tốt, trong đó có 7 bạn vừa đạt hạnh kiểm tốt vừa có học lực giỏi. Hỏi

- Lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết muốn được khen thưởng thì hoặc học sinh giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt.
- Lớp 10A có bao nhiêu bạn chưa được xét học lực giỏi và hạnh kiểm tốt.

Bài 24. Một lớp có 25 học sinh khá các môn tự nhiên, 24 học sinh khá các môn xã hội, 10 học sinh khá cả 2 và 3 học sinh không khá môn nào. Hỏi:

- Lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá tự nhiên.
- Lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá xã hội.
- Lớp có bao nhiêu hoặc khá tự nhiên hoặc khá xã hội.
- Lớp có bao nhiêu em học sinh.

Bài 25. Lớp 10A có 35 bạn học sinh làm kiểm tra toán. Đề bài gồm 3 bài toán. Sau khi kiểm tra, cô giáo tổng hợp kết quả như sau: có 20 em giải được bài toán thứ nhất; 14 em giải được bài toán 2; 10 em giải được bài toán 3; 5 em giải được bài toán 2 và bài toán 3; 2 em giải được bài toán 1 và bài toán 2; 6 em giải được bài toán 1 và bài toán 3, chỉ có 1 học sinh đạt được điểm 10 vì giải được cả 3 bài. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh không giải được bài nào.

Lời giải. Đáp số: 3 bạn.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 26. Cho tập hợp $F = \{n \in \mathbb{N} \mid -2 < n < 3\}$ và tập hợp \mathbb{Z} các số nguyên. Xác định tập hợp $F \cap \mathbb{Z}$.

Lời giải. $F \cap \mathbb{Z} = \{0; 1; 2\}$

Bài 27. Cho $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ biết tập $A \subset X$, $A \cap \{2; 4; 6\} = \{2\}$ và $A \cup \{2; 4; 6\} = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm tập A .

Lời giải. Ta thấy $2 \in A$ và $\{3; 5\} \subset A$ và các số $1 \notin A; 4 \notin A; 6 \notin A$. Vậy tập $A = \{2; 3; 5\}$.

Bài 28. Cho hai tập hợp $A = \{-3; -2; 0; 1; 2; 5; 9\}$, $B = \{-2; 0; 3; 8; 15\}$. Hãy xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Lời giải. Ta có:

$$A \cup B = \{-3; -2; 0; 1; 2; 3; 5; 8; 9; 15\}, A \cap B = \{-2; 0\}$$

$$A \setminus B = \{-3; 1; 2; 5; 9\}, B \setminus A = \{3; 8; 15\}.$$

Bài 29. Kí hiệu H là tập hợp các học sinh của lớp 10A; T là tập hợp các học sinh nam và G là tập hợp các học sinh nữ của lớp 10A. Hãy xác định các tập hợp sau:

- a) $T \cup G$; b) $T \cap G$; c) $H \setminus T$; d) $G \setminus T$; e) $\mathbb{C}_H G$.

Lời giải.

a) $T \cup G$ là tập hợp các học sinh trong lớp 10A, $T \cup G = H$.

b) $T \cap G = \emptyset$.

c) $H \setminus T = G$.

d) $G \setminus T = G$.

e) $\mathbb{C}_H G = H \setminus G = T$.

Bài 30. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+2| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2}{x+2} \in \mathbb{Z}\}$. Tìm $A \cup B$.

Lời giải. Ta có $|x+2| < 3 \Leftrightarrow -5 < x < 1$ nên $A = \{-4; -3; -2; -1; 0\}$.

Lại có $\frac{x^2}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}$ nên $\frac{x^2}{x+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{x+2} \in \mathbb{Z}$.

Từ đó suy ra $x+2 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ nên $B = \{-6; -4; -3; -1; 0; 2\}$.

Vì vậy $A \cup B = \{-6; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$

Bài 31. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn và không lớn hơn 10, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 6\}$ và $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm

- a) $A \cap (B \cup C)$; b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Lời giải. $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $C = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

a) $B \cup C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$.

b) Ta có: $A \setminus B = \{8; 10\}$, $A \setminus C = \{0; 2\}$, $B \setminus C = \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy:

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{0; 1; 2; 3; 8; 10\}.$$

Bài 32. Cho A, B, C là ba tập hợp rời nhau đôi một. X là tập hợp sao cho các tập $X \cap A$, $X \cap B$, $X \cap C$ có đúng 1 phần tử. Hỏi tập X có ít nhất là bao nhiêu phần tử?

Lời giải. Giả sử $X \cap A = \{a\}$, $X \cap B = \{b\}$, $X \cap C = \{c\}$. Khi đó $a, b, c \in X$. Do A, B, C rời nhau đôi một nên a, b, c phải khác nhau đôi một. Vậy tập X có ít nhất là 3 phần tử.

Bài 33. Cho $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

a) Xác định tập hợp $B \setminus A$.

b) Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \subset X$ và $X \subset B$.

Lời giải.

a) Ta có $B \setminus A = \{4; 5; 6\}$.

b) Vì $A \subset X$ nên $1, 2, 3$ thuộc X , do đó, để $X \subset B$ thì các tập hợp X thỏa mãn điều bài là:

$$\begin{aligned} X &= \{1; 2; 3\}, X = \{1; 2; 3; 4\}, X = \{1; 2; 3; 5\}, X = \{1; 2; 3; 6\}, \\ X &= \{1; 2; 3; 4; 5\}, X = \{1; 2; 3; 4; 6\}, X = \{1; 2; 3; 5; 6\}, X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}. \end{aligned}$$

Bài 34. Cho tập hợp A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

$$A \cup \{1; 2; 3\} = \{1; 2; 3; 4\}, \quad (1)$$

$$A \cap \{1; 2; 3\} = \{1; 2\}. \quad (2)$$

Hãy xác định tập hợp A .

Lời giải. Từ (1) suy ra $A \subset \{1; 2; 3; 4\}$. Từ (2) suy ra $\{1; 2\} \subset A$ và $3 \notin A$.

Điều kiện (1) cho ta $4 \in A$. Vậy ta có: $A = \{1; 2; 4\}$.

Bài 35. Hãy xác định tập hợp X biết rằng:

$$\{1; 3; 5; 7\} \subset X, \{3; 5; 9\} \subset X, X \subset \{1; 3; 5; 7; 9\}.$$

Lời giải. Từ giả thiết $\{1; 3; 5; 7\} \subset X, \{3; 5; 9\} \subset X$, ta có:

$$\{1; 3; 5; 7\} \cup \{3; 5; 9\} \subset X \Rightarrow \{1; 3; 5; 7; 9\} \subset X. \quad (1)$$

Mặt khác, theo giả thiết ta có: $X \subset \{1; 3; 5; 7; 9\}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $X = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.

Bài 36. Cho tập hợp $X = \{a; b; c; d; e; g\}$.

a) Hãy xác định tập hợp Y sao cho $Y \subset X$ và $X \setminus Y = \{b; c; e\}$.

b) Hãy xác định hai tập hợp A và B sao cho:

$$A \cup B = X, B \setminus A = \{d; e\} \text{ và } A \setminus B = \{a; b; c\}.$$

Lời giải.

a) $X \setminus Y = \{b; c; e\}$ nên b, c, e không thuộc tập Y . Hơn nữa do $Y \subset X$ nên $Y = \{a; d; g\}$.

b) Từ $A \setminus B = \{a; b; c\}$ ta suy ra A chứa a, b, c và B không chứa a, b, c . Từ $B \setminus A = \{d; e\}$ ta suy ra B chứa d, e và A không chứa d, e . Lại có $A \cup B = X$ nên phần tử g thuộc A hoặc thuộc B . Ngoài ra $g \notin A \setminus B$ và $g \notin B \setminus A$ nên $g \in A$ và $g \in B$. Do đó: $A = \{a; b; c; g\}, B = \{d; e; g\}$.

Bài 37. Cho hai tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x-1}{x+3} \in \mathbb{Z}\right\}, B = \{4; 6; 8; 10\}$. Tìm $A \cap B$ và $A \cup B$.

Giải. Ta có $\frac{2x-1}{x+3} = 2 - \frac{7}{x+3}$. Do đó với $x \in \mathbb{Z}$ và $x \neq -3$ thì $\frac{2x-1}{x+3} \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $x+3$ là ước của 7, tức là

$$\begin{cases} x+3=1 \\ x+3=-1 \\ x+3=7 \\ x+3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-4 \\ x=4 \\ x=-10. \end{cases}$$

Vậy $A = \{-2; -4; 4; -10\}$, suy ra: $A \cup B = \{-2; -4; -10; 4, 6, 8, 10\}, A \cap B = \{4\}$.

Bài 38. Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

a) Tìm các tập hợp con A, B của S sao cho:

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}, A \cap B = \{1; 2\}.$$

b) Tìm các tập C sao cho: $C \cup (A \cap B) = A \cup B$.

Lời giải.

a) Từ $A \cap B = \{1; 2\}$ ta có A và B phải có chung đúng hai phần tử 1 và 2. Từ $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$ suy ra hai phần tử 3 và 4 phải thuộc một và chỉ một trong hai tập A và B . Do đó có bốn kết quả sau đây:

$$\begin{cases} A = \{1; 2; 3\} \\ B = \{1; 2; 4\} \end{cases}, \begin{cases} A = \{1; 2; 4\} \\ B = \{1; 2; 3\} \end{cases}, \begin{cases} A = \{1; 2; 3; 4\} \\ B = \{1; 2\} \end{cases}, \begin{cases} A = \{1; 2\} \\ B = \{1; 2; 3; 4\} \end{cases}.$$

b) Vì $C \cup (A \cap B) = A \cup B$ mà $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$, $A \cap B = \{1; 2\}$ nên $3, 4 \in C$. Do đó các tập C thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$\{3; 4\}, \{1; 3; 4\}, \{2; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 4\}.$$

Bài 39. Xét X và Y là hai tập hợp con của tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ và thỏa mãn ba điều kiện:

- (1) $X \cap Y = \{4; 6; 9\}$.
- (2) $X \cup \{3; 4; 5\} = \{1; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$.
- (3) $Y \cup \{4; 8\} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

a) Hãy chỉ ra rằng từ điều kiện (1) và (2) ta suy ra $1 \in X$ và $1 \notin Y$, $8 \in X$ và $8 \notin Y$, $7 \notin X$.

b) Xác định các tập hợp X và Y mà thỏa mãn các điều kiện (1), (2) và (3).

Lời giải.

a) Vì $1 \in X \cup \{3; 4; 5\}$ nên $1 \in X$ và vì $1 \notin X \cap Y$ nên $1 \notin Y$. Tương tự ta có $8 \in X$ và $8 \notin Y$. Từ (3) suy ra $7 \in Y$, do đó $7 \notin X$ vì nếu $7 \in X$ thì mâu thuẫn với (1).

b) Ta có:

- $1 \in X$ và $1 \notin Y$;
- $2 \notin X$ (do (2)) và $2 \in Y$ (do (3));
- $3 \in Y$ (do (3)) và $3 \notin X$ (do (1));
- $4 \in X$ và $4 \in Y$ (do (1));
- $5 \in Y$ (do (3)) và $5 \notin X$ (do (1));
- $6 \in X$ và $6 \in Y$ (do (1));
- $7 \in Y$ (do (3)) và $7 \notin X$ (do (1));
- $8 \in X$ và $8 \notin Y$ (do câu a));
- $9 \in X$ và $9 \in Y$ (do (1)).

Từ các điều kiện trên, ta đi tới:

$$X = \{1; 4; 6; 8; 9\}, Y = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}.$$

Bài 40. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x - m = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - mx + 1 = 0\}$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị của m để $A \cap B \neq \emptyset$

Lời giải. Vì $A \cap B \neq \emptyset$ nên tồn tại $a \in A \cap B$. Khi đó

$$\begin{cases} a^2 + a - m = 0 \\ a^2 - ma + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1+m)a - (1+m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Nếu $m = -1$ thử lại thấy $B = \emptyset$ nên không thỏa.
- Nếu $a = 1$ thay vào tập A tìm được $m = 2$. Thử lại khi $m = 2$ thấy $A \cap B = \{1\}$.

Vậy $m = 2$.

Bài 41. Cho 3 tập hợp:

$$\begin{aligned} A &= \{x | x = 3n - 2, n \in \mathbb{N}^*\} \\ B &= \{x | x = 1003 - 2m, m \in \mathbb{N}^*\} \\ C &= \{x | x = 6p + 1, p \in \mathbb{Z}, 0 \leq p \leq 166\}. \end{aligned}$$

Chứng minh rằng $A \cap B = C$.

Giải. Cần chứng minh $A \cap B \subset C$ và $C \subset A \cap B$.

- Giả sử $x \in A \cap B$, cần chỉ ra $x \in C$. Thực vậy, nếu $x \in A \cap B$ thì $x \in A$ và $x \in B$, tức là tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho:

$$x = 3n - 2 = 1003 - 2m.$$

Khi đó: $m = \frac{1005 - 3n}{2} \Leftrightarrow m = 502 - n - \frac{n-1}{2}$. Vì m, n là những số nguyên dương nên suy ra $\frac{n-1}{2} = p \in \mathbb{Z}$. Từ đó $n = 2p + 1$ và

$$m = 502 - (2p + 1) - p = 501 - 3p.$$

Vì m, n là những số nguyên dương nên

$$\begin{cases} 2p + 1 \geq 1 \\ 501 - 3p \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \leq \frac{500}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq p \leq 166.$$

Nhưng $x = 3n - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 6p + 1$, suy ra

$$x \in C \Rightarrow A \cap B \subset C. \quad (1)$$

- Chứng minh $C \subset A \cap B$. Giả sử $x \in C$, cần chứng minh $x \in A \cap B$. Thực vậy, nếu $x \in C$ thì tồn tại $p \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p \leq 166$, sao cho $x = 6p + 1$. Ta sẽ chỉ ra rằng x có thể được viết dưới dạng $x = 3n - 2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$x = 6p + 1 = (6p + 3) - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 3n - 2,$$

với $n = 2p + 1 \in \mathbb{N}^*$, suy ra $x \in A$. Ta còn phải chứng minh $x \in B$.

$$x = 6p + 1 = 1003 - (1002 - 6p) = 1003 - 2(501 - 3p) = 1003 - 2m,$$

với $m = 501 - 3p$. Ta có:

$$0 \leq p \leq 166 \Rightarrow 0 \leq 3p \leq 498 \Rightarrow 501 - 3p \geq 3 \Rightarrow m = 501 - 3p \in \mathbb{N}^*.$$

Như vậy $x \in B$. Từ $x \in A$ và $x \in B$ suy ra

$$x \in A \cap B \Leftarrow C \subset A \cap B. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \cap B = C$, điều phải chứng minh.

§4. CÁC TẬP HỢP SỐ

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Các tập hợp số đã học

Định nghĩa 1. Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ và $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Định nghĩa 2. Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Định nghĩa 3. Tập hợp các số hữu tỉ kí hiệu \mathbb{Q} , là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

Định nghĩa 4. Tập hợp các số thực kí hiệu \mathbb{R} , gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn. Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỉ.

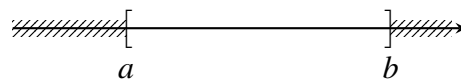
2. Các tập con thường dùng của \mathbb{R}

Trong toán học ta thường gặp các tập hợp con sau đây của tập hợp các số thực \mathbb{R}

a. Khoảng

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$	
$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} a < x\}$	
$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} x < b\}$	

b. Đoạn $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$



c. Nửa khoảng

$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$	
$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$	
$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} a \leq x\}$	
$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} x \leq b\}$	

⚠ Kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực (hoặc dương vô cùng), kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực (hoặc âm vô cùng).

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định giao - hợp của hai tập hợp

a) Xác định giao của hai tập hợp ta làm như sau

- Biểu diễn các tập hợp lên trục số.
- Dùng định nghĩa giao để xác định các phần tử của tập hợp.

b) Cho hai tập con của tập số thực A và B . Tìm $A \cup B$ ta làm như sau

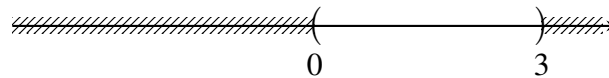
- Biểu diễn tập A trên trục số, gạch chéo phần không thuộc A .
- Làm tương tự đối với tập B .
- Phần không gạch chéo trên hình là $A \cup B$.

c) Đối với hai tập A và B khác để tìm $A \cup B$ ta nhớ rằng $x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$

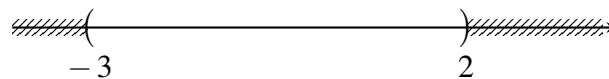
Ví dụ 1. Xác định tập hợp $(0;3) \cup (-3;2)$ và biểu diễn trên trục số

Lời giải.

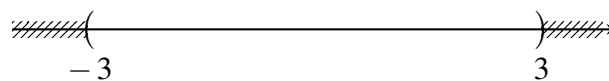
- Biểu diễn tập hợp A trên trục số



- Biểu diễn tập B trên trục số



- Kết hợp hai trục số trên ta được tập $A \cup B = (-3; 3)$.

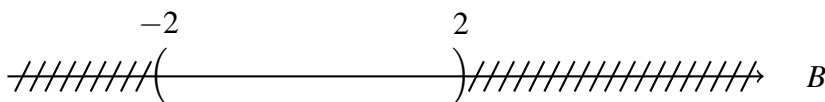


Ví dụ 2. Cho $m > 5$. Xác định tập hợp $[-2; m) \cup [0; 4)$.

Lời giải. Vì $m > 5$ nên $m > 4 \Rightarrow [0; 4) \subset [-2; m) \Rightarrow [-2; m) \cup [0; 4) = [-2; m)$.

Ví dụ 3. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$. Tìm $A \cap B$.

Lời giải.



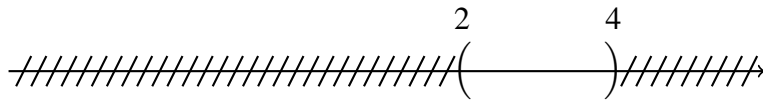
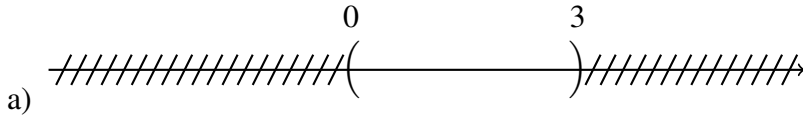
$\Rightarrow A \cap B = [-1; 2)$.

Ví dụ 4. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

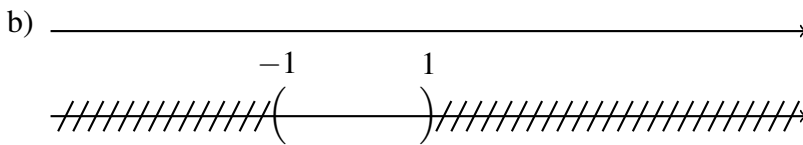
a) $(0;3) \cap (2;4)$.

b) $\mathbb{R} \cap (-1;1)$.

Lời giải.



$\Rightarrow (0;3) \cap (2;4) = (2;3)$.



$\Rightarrow \mathbb{R} \cap (-1;1) = (-1;1)$.

Ví dụ 5. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+4| \geq 3\}$, $C = [-5;3]$. Tìm các tập hợp

a) $A \cap B$.

b) $B \cap C$.

c) $A \cap B \cap C$.

d) $A \cup B$.

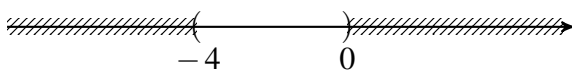
e) $A \cap B \cup C$.

f) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

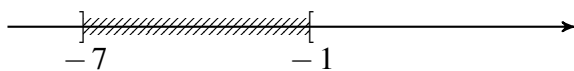
Lời giải. $|x+2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+2 < 2 \Leftrightarrow -4 < x < 0$. Do đó $A = (-4;0)$.

$|x+4| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \leq -3 \\ x+4 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -7 \\ x \geq -1 \end{cases}$. Do đó $B = (-\infty; -7] \cup [-1; +\infty)$.

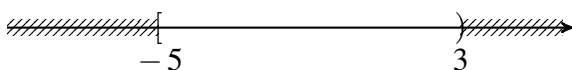
Biểu diễn tập A trên trục số:



Biểu diễn tập B trên trục số:



Biểu diễn tập C trên trục số:



a) $A \cap B = [-1;0)$.

b) $B \cap C = (-\infty; -7] \cup [-5; +\infty)$.

c) $A \cap B \cap C = [-1; 0)$.

d) $A \cup B = (-\infty; -7] \cup (-4; +\infty)$.

e) $A \cap B \cup C = [-5; 3)$.

f) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

$(A \cup B) = (-\infty; -7] \cup (-4; +\infty)$.

$(B \cup C) = (-\infty; -7] \cup [-5; +\infty)$.

Do đó $(A \cup B) \cap (B \cup C) = (-\infty; -7] \cup (-4; +\infty)$.

Ví dụ 6. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{x-1} \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 - x^2 \leq 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{x+1}{x+3} \right| \leq 1\}$.

Tìm các tập hợp

a) $A \cap B \cap C$.

b) $(A \cup B) \cap C$.

c) $(A \cup C) \cap B$.

d) $A \cap (B \cup C)$.

Lời giải.

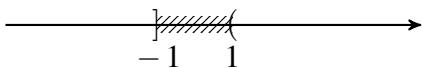
• $\frac{x+1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x > 1 \end{cases}$. Do đó $A = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$.

• $9 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 3 \end{cases}$. Do đó $B = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

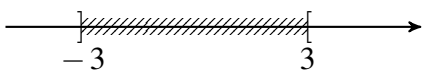
• $\left| \frac{x+1}{x+3} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x+1}{x+3} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x+3} \geq -1 \\ \frac{x+1}{x+3} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+4}{x+3} \geq 0 \\ \frac{-2}{x+3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3) \cup [-2; +\infty) \\ x \in (-3; -\infty) \end{cases}$. Do

đó $C = [-2; +\infty)$.

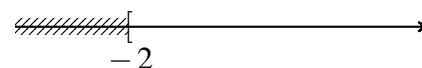
Biểu diễn tập A trên trục số:



Biểu diễn tập B trên trục số:



Biểu diễn tập C trên trục số:



a) $A \cap B \cap C = [3; +\infty)$.

b) $(A \cup B) = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$.

$(A \cup B) \cap C = [-2; -1] \cup (1; +\infty)$.

c) $(A \cup C) = \mathbb{R}$.

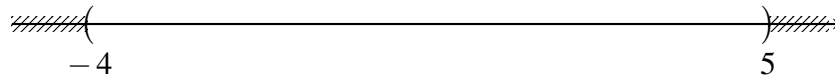
$(A \cup C) \cap B = B = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

d) $(B \cup C) = (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$
 $A \cap (B \cup C) = (-\infty; -3] \cup (1; +\infty).$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xác định tập hợp $[0; 5) \cup (-4; 2)$ và biểu diễn trên trục số.

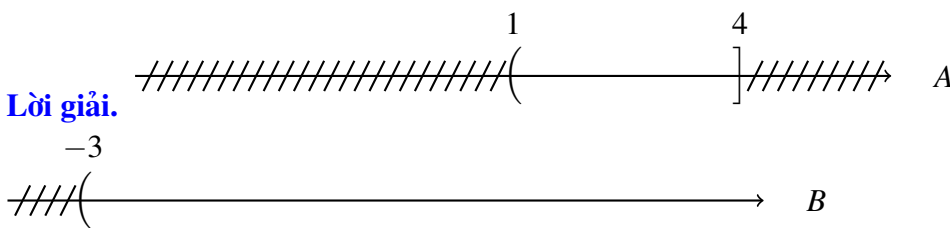
Lời giải. Lần lượt biểu diễn hai tập hợp $[0; 5)$ và $(-4; 2)$ từ đó thu được tập hợp $[0; 5) \cup (-4; 2) = (-4; 5)$.
 được biểu diễn trên trục số sau



Bài 2. Cho hai tập hợp $A = [m + 1; 10)$ với $m < 0$ và tập hợp $B = (5; 8)$. Hãy xác định tập hợp $A \cup B$.

Lời giải. Vì $m < 0 \Rightarrow m + 1 < 1 < 5 \Rightarrow A \cup B = [m + 1; 10) \cup (5; 8) = [m + 1; 10)$.

Bài 3. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$. Tìm $A \cap B$.

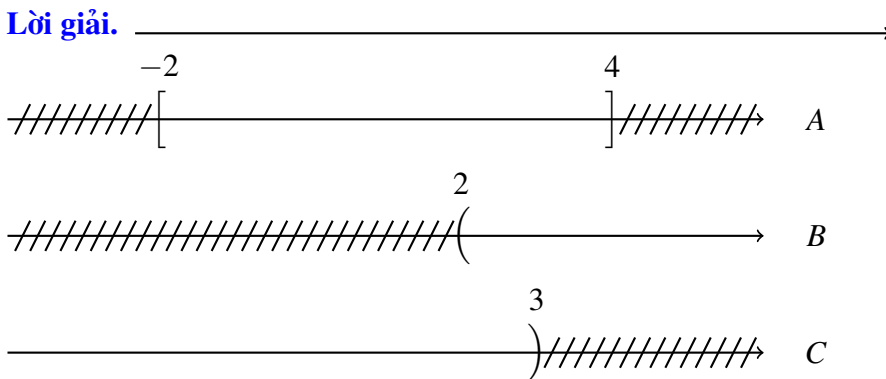


$\Rightarrow A \cap B = (1; 4]$.

Bài 4. Cho $A = [-2; 4]$, $B = (2; +\infty)$, $C = (-\infty; 3)$. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $A \cap B, B \cap C$.

b) $\mathbb{R} \cap A, \mathbb{R} \cap B$.



a) $A \cap B = (2; 4], B \cap C = (2; 3)$.

b) $\mathbb{R} \cap A = [-2; 4], \mathbb{R} \cap B = (2; +\infty)$.

Bài 5. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | |2x - 1| \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | |3x - 6| > 3\}$, $C = [1; 2]$. Tìm các tập hợp

a) $A \cap B \cap C$.

b) $A \cup B \cup C$.

c) $(A \cap B) \cup C$.

d) $A \cup (B \cap C)$.

Lời giải.

- a) $A \cap B \cap C = \emptyset$.
- b) $A \cup B \cup C = (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.
- c) $(A \cap B) \cup C = [0; 2]$.
- d) $A \cup (B \cap C) = [0; 1]$.

Bài 6. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2 - 4}{1 + x^2} > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{1 - 3x}{x + 2} \right| \geq 2\}$, $C = [0; 3]$. Tìm các tập hợp

- a) $A \cap B \cap C$.
- b) $A \cup B \cup C$.
- c) $(A \cap B) \cup C$.
- d) $A \cup (B \cap C)$.
- e) $B \cap (A \cup C)$.
- f) $(A \cup B) \cap C$.

Lời giải.

- a) $A \cap B \cap C = \emptyset$.
- b) $A \cup B \cup C = (-\infty; -2) \cup (-2; -\frac{3}{5}) \cup [0; +\infty)$.
- c) $(A \cap B) \cup C = (-\infty; -2) \cup [5; +\infty) \cup [0; 3]$.
- d) $A \cup (B \cap C) = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
- e) $B \cap (A \cup C) = (-\infty; -2) \cup [5; +\infty)$.
- f) $(A \cup B) \cap C = (2; 3]$.

Dạng 2. Xác định hiệu và phần bù của hai tập hợp

- Biểu diễn các tập hợp lên trục số.
- Dùng định nghĩa các phép toán hiệu, phần bù để xác định các phần tử của tập hợp.

Ví dụ 7. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$. Tìm $A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải.

$\Rightarrow A \setminus B = [2; 3], B \setminus A = (-2; -1)$.

Ví dụ 8. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$. Tìm $C_B A$.

Lời giải.

$\Rightarrow C_B A = (-3; 1] \cup (4; +\infty)$.

Ví dụ 9. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $(0; 3) \setminus (2; 4)$.
- b) $\mathbb{R} \setminus (-1; 1)$.

Lời giải.

a)

$\Rightarrow (0; 3) \setminus (2; 4) = (0; 2]$.

b)

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus (-1; 1) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Ví dụ 10. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $\mathbb{R} \setminus ((0; 1) \cup (2; 3))$.
- b) $\mathbb{R} \setminus ((3; 5) \cap (4; 6))$.

Lời giải.

a)

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus ((0; 1) \cup (2; 3)) = (-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [3; +\infty)$.

b) Ta có $((3; 5) \cap (4; 6)) = (4; 5)$.

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus ((3; 5) \cap (4; 6)) = (-\infty; 4] \cup [5; +\infty)$.

Ví dụ 11. Cho hai nửa khoảng $A = (-1; 0], B = [0; 1)$. Tìm $A \setminus B$ và $C_{\mathbb{R}}A$.

Lời giải.

$\Rightarrow A \setminus B = (-1; 0)$ và $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x\}$. Tìm $A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải.

$\Rightarrow A \setminus B = (-\infty; -2], B \setminus A = (2; +\infty)$.

Bài 8. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 0 \text{ và } 2 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$. Tìm $C_B A$.

Lời giải.

$\Rightarrow C_B A = (-3; -2] \cup [0; 2] \cup (4; +\infty)$.

Bài 9. Cho a, b, c, d là những số thực và $a < b < c < d$. Tìm $(a; d) \setminus (b; c)$ và $(b; d) \setminus (a; c)$.

Lời giải.

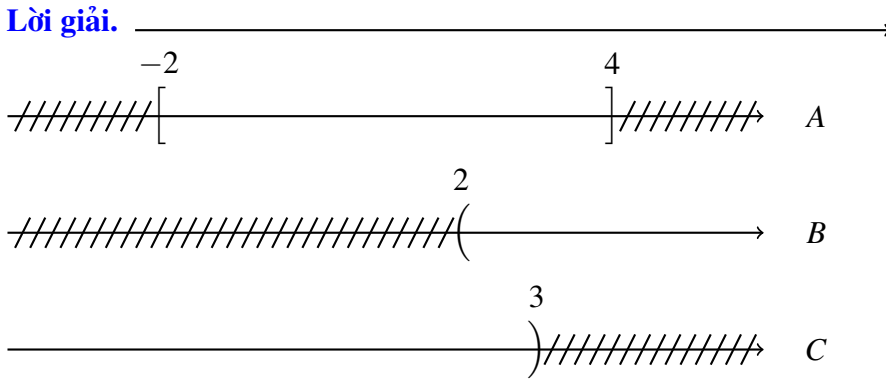
$\Rightarrow (a; d) \setminus (b; c) = (a; b] \cup [c; d)$.

$\Rightarrow (b; d) \setminus (a; c) = [c; d)$.

Bài 10. Cho $A = [-2; 4], B = (2; +\infty), C = (-\infty; 3)$. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $A \setminus B, B \setminus A$.

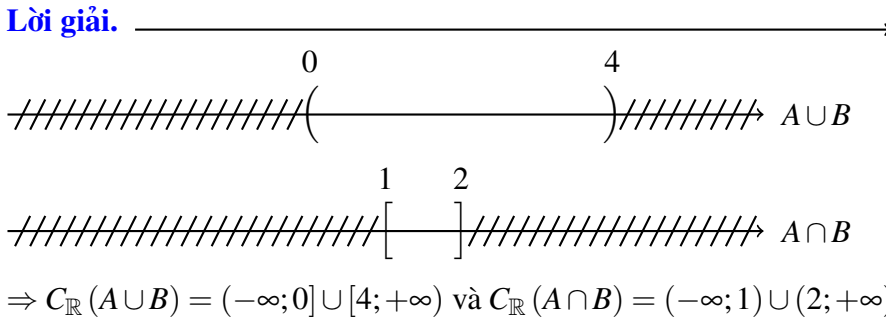
b) $\mathbb{R} \setminus A, \mathbb{R} \setminus B, \mathbb{R} \setminus C.$



a) $A \setminus B = [-2; 2], B \setminus A = (4; +\infty).$

b) $\mathbb{R} \setminus A = (\infty; -2) \cup (4; +\infty), \mathbb{R} \setminus B = (-\infty; 2], \mathbb{R} \setminus C = [3; +\infty).$

Bài 11. Cho hai nửa khoảng $A = (0; 2], B = [1; 4)$. Tìm $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$ và $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.



Dạng 3. Tìm m thỏa điều kiện cho trước

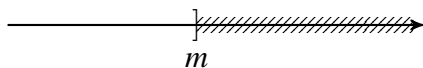
Ví dụ 12. Cho $A = (-\infty; m], B = [6; +\infty)$. Tìm m để

a) $A \cap B \neq \emptyset.$

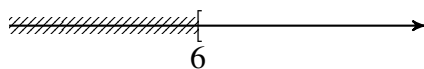
b) $(A \cap B) \subset [1; 8].$

Lời giải.

a) Biểu diễn tập hợp $A = (-\infty; m]$ trên trục số:



Biểu diễn tập hợp $B = [6; +\infty)$ trên trục số:



$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow m \geq 6.$

b) Với $m \geq 6 : A \cap B = [6; m].$

$(A \cap B) \subset [1; 8] \Leftrightarrow m \leq 8.$

Vậy $6 \leq m \leq 8$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 13. Tìm m biết

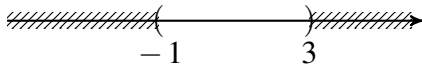
a) $(-1; 3) \cap (m; +\infty) = \emptyset$.

b) $(5; m) \cup (3; 9) = (3; 9)$.

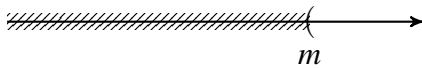
c) $(4; 12) \setminus (-\infty; m) = \emptyset$.

Lời giải.

a) Biểu diễn tập hợp $(-1; 3)$ trên trục số:

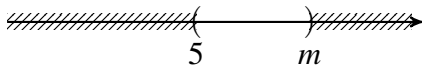


Biểu diễn tập hợp $(m; +\infty)$ trên trục số:

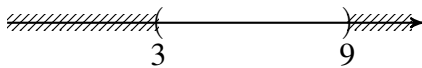


$$(-1; 3) \cap (m; +\infty) = \emptyset \Leftrightarrow m \geq 3.$$

b) Biểu diễn tập hợp $(5; m)$ trên trục số:

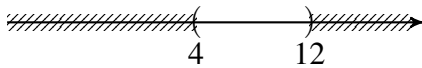


Biểu diễn tập hợp $(3; 9)$ trên trục số:

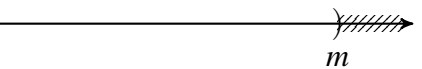


$$(5; m) \cup (3; 9) = (3; 9) \Leftrightarrow 5 \leq m \leq 9.$$

c) Biểu diễn tập hợp $(4; 12)$ trên trục số:



Biểu diễn tập hợp $(-\infty; m)$ trên trục số:



$$(4; 12) \setminus (-\infty; m) = \emptyset \Leftrightarrow m \geq 12.$$

Ví dụ 14. Cho 2 tập khác rỗng: $A = (m - 1; 5]$ và $B = (-3; 2m + 3)$; $m \neq \mathbb{R}$. Tìm m để

a) $A \cap B \neq \emptyset$.

b) $A \subset B$.

c) $B \subset A$.

d) $(A \cap B) \subset (-2; 4)$.

Lời giải. Đầu tiên ta cần xét điều kiện để 2 tập A, B khác \emptyset là:

$$\begin{cases} m - 1 < 5 \\ 2m + 3 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 6 (*).$$

Với điều kiện (*) ta có:

a) $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow 2m + 3 > m - 1 \Leftrightarrow m > -4$.

Đối chiếu với điều kiện (*), các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $-3 < m < 6$.

$$b) A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq -3 \\ 2m+3 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Đổi chiều với điều kiện (*), các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $1 < m < 6$.

$$c) B \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq -3 \\ 2m+3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2.$$

Đổi chiều với điều kiện (*), các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $-3 < m \leq -2$.

$$d) (A \cap B) \subset (-2; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq -2 \\ 2m+3 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \text{ (thỏa yêu cầu điều kiện (*)).}$$

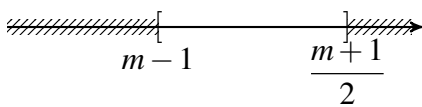
Ví dụ 15. Cho tập $A = \left[m-1; \frac{m+1}{2} \right]$, $B = (-\infty; -3) \cup [3; +\infty)$. Tìm m để

a) $A \subset B$.

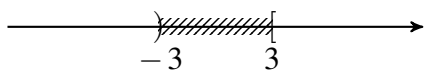
b) $(A \cap B) = \emptyset$.

Lời giải. Trước tiên ta cần tìm điều kiện để tồn tại tập A là: $m-1 \leq \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \leq 3$ (*)

Biểu diễn tập hợp A trên trục số:



Biểu diễn tập hợp B trên trục số:



$$a) A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset (-\infty; -3) \\ A \subset [3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{2} < -3 \\ m-1 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -7 \\ m \geq 4 \end{cases}.$$

Đổi chiều điều kiện (*), ta có $m < -7$ thỏa yêu cầu bài toán.

$$b) A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq -3 \\ \frac{m+1}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 5.$$

Đổi chiều điều kiện (*), ta có $-2 \leq m \leq 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 16. Cho $A = (-\infty; m)$, $B = [2m-1; 2m+2)$. Tìm m để

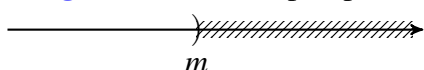
a) $A \cap B = \emptyset$.

b) $B \subset A$.

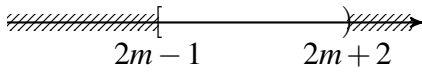
c) $A \subset \mathbb{C}_{\mathbb{R}} B$.

d) $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} A \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải. Biểu diễn tập hợp A trên trục số:



Biểu diễn tập hợp B trên trục số:



a) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow m \leq 2m - 1 \Leftrightarrow m \geq 1.$

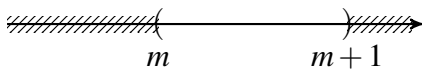
b) $B \subset A \Leftrightarrow 2m + 2 < m \Leftrightarrow m < -2.$

c) $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; 2m - 1) \cup (2m + 2; +\infty).$
 $A \subset C_{\mathbb{R}}B \Leftrightarrow m \leq 2m - 1 \Leftrightarrow m \geq 1.$

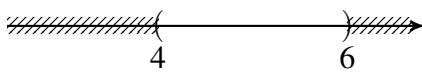
d) $C_{\mathbb{R}}A = [m; +\infty).$
 $C_{\mathbb{R}}A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow m \leq 2m + 2 \Leftrightarrow m \geq -2.$

Ví dụ 17. Cho $A = (m; m + 1), B = (4; 6)$. Tìm m để $A \cup B$ là 1 khoảng. Hãy xác định khoảng đó.

Lời giải. Biểu diễn tập hợp A trên trục số:



Biểu diễn tập hợp B trên trục số:



$A \cup B$ là 1 khoảng $\Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m + 1 \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 6.$

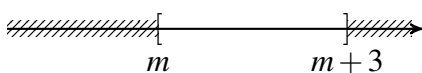
TH1: Nếu $3 < m \leq 4$ thì $A \cup B = (m; m + 1) \cup (4; 6) = (m; 6).$

TH2: Nếu $4 < m \leq 5$ thì $A \cup B = (4; 6).$

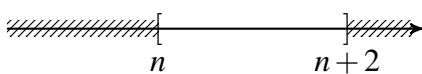
TH3: Nếu $5 < m < 6$ thì $A \cup B = (4; m + 1).$

Ví dụ 18. Cho $A = [m; m + 3], B = [n; n + 2]$. Tìm điều kiện m, n để $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải. Biểu diễn tập hợp A trên trục số:



Biểu diễn tập hợp B trên trục số:



Đầu tiên ta tìm điều kiện của m và n để $A \cap B = \emptyset$.

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 < n \\ n + 2 < m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < n - 3 \\ m > 2 + n \end{cases}$

Từ trên ta suy ra: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow n - 3 \leq m \leq 2 + n.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 12. Tìm m để

a) $(1; m] \cap (3; +\infty) \neq \emptyset.$

b) $(-\infty; -2) \cup [2m + 1; +\infty) = \mathbb{R}.$

c) $(m - 2; 3) \subset [-1; 5].$

Lời giải.

- a) $1 < m < 2$.
 b) $m < -\frac{3}{2}$.
 c) $1 \leq m < 5$.

Bài 13. Cho $A = (-\infty; m)$, $B = [5m - 2; 5m + 5]$. Tìm m để

- a) $A \cap B = \emptyset$.
 b) $B \subset A$.
 c) $A \subset (\mathbb{R} \setminus B)$.
 d) $(\mathbb{R} \setminus A) \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải.

- a) $m \geq \frac{1}{2}$.
 b) $m < -\frac{5}{4}$.
 c) $m \geq \frac{1}{2}$.
 d) $m \geq -\frac{5}{4}$.

Bài 14. Cho $A = \left[m - 3; \frac{m + 3}{2} \right]$, $B = (-\infty; -4) \cup [4; +\infty)$. Tìm m để

- a) $A \subset B$.
 b) $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải.

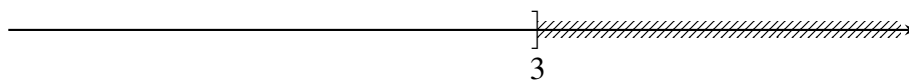
- a) $\begin{cases} m < -11 \\ 7 \leq m < 9 \end{cases}$.
 b) $-1 \leq m < 5$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

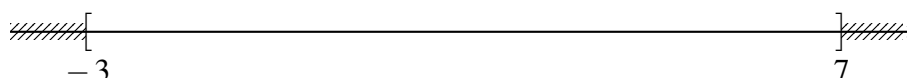
Bài 15. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 7\}$; $C = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 3\}$ và $D = \{x \in \mathbb{Z} | -4 \leq x \leq 5\}$. Biểu diễn các tập A, B, C, D trên trục số và xác định tập hợp $(A \cap B) \setminus (C \cap D)$.

Lời giải. Biểu diễn các tập trên trục số như sau

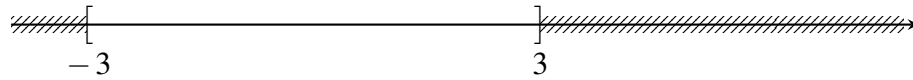
- Tập $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\} = (-\infty; 3]$



- Tập $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 7\} = [-3; 7]$



- Tập $A \cap B = [-3; 3]$



- Tập $C = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
- Tập $D = \{x \in \mathbb{Z} | -4 \leq x \leq 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
 $\Rightarrow C \cap D = \{1, 2, 3\}$

Từ đó ta có tập $(A \cap B) \setminus (C \cap D) = [-3; 3] \setminus \{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 3, x \neq 1, 2, 3\}$.

Bài 16. Cho $a > 0$. Hãy xác định tập hợp $\left((0; a] \cap \left(\frac{a}{2}; 2a\right)\right) \setminus \{a\}$.

Lời giải. Ta lần lượt biểu diễn từng tập $(0; a]$, $\left(\frac{a}{2}; 2a\right)$ trên trục số và nhớ rằng $a > 0$ thu được

$$(0; a] \cap \left(\frac{a}{2}; 2a\right) \setminus \{a\} = \left(\frac{a}{2}; a\right] \setminus \{a\} = \left(\frac{a}{2}; a\right).$$

Bài 17. Cho $a > 0$. Hãy xác định tập hợp $\left(\left[\frac{a}{3}; 5a\right] \cup (0; a)\right) \cap (3a; 6a)$.

Lời giải. Lần lượt biểu diễn các tập hợp $\left[\frac{a}{3}; 5a\right]$, $(0; a)$, $(3a; 6a)$ trên trục số và nhớ rằng $a > 0$ thu được

$$\left(\left[\frac{a}{3}; 5a\right] \cup (0; a)\right) \cap (3a; 6a) = (0; 5a] \cap (3a; 6a) = (3a; 5a].$$

§5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I

I. Đề số 1a

Bài 1. (3 điểm)

- a) Xét tính đúng sai và lập mệnh đề phủ định của mệnh đề $P : " \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -3 "$.
- b) Cho tam giác ABC , xét hai mệnh đề $P : AB^2 + AC^2 = BC^2$, $Q : \widehat{A} = 90^\circ$. Hãy lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

Lời giải.

- a) Mệnh đề P là sai. Phủ định của P là $\bar{P} : \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -3$.
- b) Cho tam giác ABC , mệnh đề $P \Rightarrow Q$ phát biểu như sau: Trong tam giác ABC , nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì góc $\widehat{A} = 90^\circ$.
Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là đúng.

Bài 2. (2 điểm) Cho hai tập hợp $A = (2; 5)$, $B = [-1; 3)$. Xác định các tập hợp sau: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

Lời giải. $A \cap B = (2; 3)$, $A \cup B = [-1; 5)$, $A \setminus B = [3; 5)$, $B \setminus A = [-1; 2]$.

Bài 3. Cho các tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = [-3; 2)$ và $C_{\mathbb{R}}B = (-2; 3)$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

Lời giải. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = [-3; 2) \Rightarrow A = (-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$.

Tập hợp $C_{\mathbb{R}}B = (-2; 3) \Rightarrow B = (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$.

Tập hợp $A \cap B = (-\infty; -3) \cup [3; +\infty) \Rightarrow C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = [-3; 3)$.

Bài 4. (2 điểm) Mỗi học sinh lớp 10A đều chơi bóng bàn hoặc cầu lông. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng bàn, 23 bạn chơi cầu lông và 10 bạn chơi cả hai môn. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

Lời giải. Gọi X và Y là tập hợp các bạn chơi bóng bàn và cầu lông của lớp 10A. Ta có số phần tử của $X \cap Y$ bằng 10. Số phần tử của $X \cup Y$ là $25 + 23 - 10 = 38$. Vậy lớp 10A có 38 học sinh.

Bài 5. (1 điểm) Độ cao của một cái cây là $h = 50,54\text{m} \pm 0,1\text{m}$. Hãy viết số quy tròn của số 50,54.

Lời giải. Số quy tròn của 50,54 là 51.

II. Đề số 1b

Bài 1. (3 điểm)

- a) Xét tính đúng sai và lập mệnh đề phủ định của mệnh đề $P : " \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 3 "$.
- b) Cho tam giác ABC , xét hai mệnh đề $P : AB = BC$, $Q : \widehat{A} = \widehat{C}$. Hãy lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

Lời giải.

- a) Mệnh đề P là đúng. Phủ định của P là $\bar{P} : " \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 3 "$.
- b) Cho tam giác ABC , mệnh đề $P \Rightarrow Q$ phát biểu như sau: Trong tam giác ABC , nếu $AB = BC$ thì góc \widehat{A} bằng góc \widehat{C} . Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là đúng.

Bài 2. (2 điểm) Cho hai tập hợp $A = (1; 6)$, $B = [0; 4)$. Xác định các tập hợp sau: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

Lời giải. $A \cap B = (1; 4)$, $A \cup B = [0; 6)$, $A \setminus B = [4; 6)$, $B \setminus A = [0; 1]$.

Bài 3. Cho các tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = [-4; 2)$ và $C_{\mathbb{R}}B = (-3; 3)$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

Lời giải. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = [-4; 2) \Rightarrow A = (-\infty; -4) \cup [2; +\infty)$.

Tập hợp $C_{\mathbb{R}}B = (-3; 3) \Rightarrow B = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Tập hợp $A \cap B = (-\infty; -4) \cup [3; +\infty) \Rightarrow C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = [-4; 3)$.

Bài 4. (2 điểm) Mỗi học sinh lớp 10B đều giỏi Toán hoặc giỏi Tiếng Anh. Biết rằng có 28 bạn giỏi Toán, 22 bạn giỏi Tiếng Anh và 10 bạn giỏi cả hai môn. Hỏi lớp 10B có bao nhiêu học sinh?

Lời giải. Gọi X và Y là tập hợp các bạn giỏi Toán và giỏi Tiếng Anh của lớp 10B. Ta có số phần tử của $X \cap Y$ bằng 10. Số phần tử của $X \cup Y$ là $28 + 22 - 10 = 40$. Vậy lớp 10B có 40 học sinh.

Bài 5. (1 điểm) Chiều dài của một cây cầu là $l = 150,45\text{m} \pm 0,1\text{m}$. Hãy viết số quy tròn của số 150,45.

Lời giải. Số quy tròn của 150,45 là 150.

III. Đề số 2a

Bài 1. (3,0 điểm)

- Mệnh đề sau đây đúng hay sai? giải thích.
"Mọi số thực chia hết cho 6 đều chia hết cho 3".
- Dùng kí hiệu \exists để viết mệnh đề: "Có một số thực mà bình phương của nó bằng -1 ."
- Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} > x$."

Lời giải.

- Số 6 chia hết cho 3 nên
Số chia hết cho 6 cũng chia hết cho 3. Vậy mệnh đề đã cho là một mệnh đề đúng.
- Mệnh đề được viết là: " $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$."
- Mệnh đề phủ định là: " $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} \leq x$."

Bài 2. (2,0 điểm)

- Liệt kê các phần tử của tập hợp $B = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 7x + 3 = 0\}$.
- Liệt kê các tập con của tập hợp $C = \{1, 2, 3\}$

Lời giải.

- $B = \left\{ \frac{3}{4}, 1 \right\}$.
- Các tập con của tập hợp C là:
 $\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}$.

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho hai tập hợp $A = \{2, 3, 4, 7, 9\}$ và $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$. Tìm: $A \cup B; A \cap B; B \setminus A; A \setminus B$.

Lời giải. $*A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

$*A \cap B = \{2, 4, 7, 9\}$.

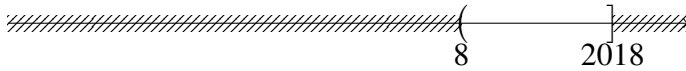
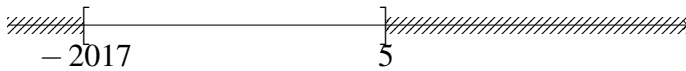
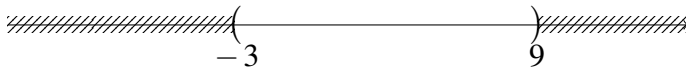
$*B \setminus A = \{5, 6\}$.

$*A \setminus B = \{3\}$.

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho các tập hợp $A = (-3; 9); B = [-2017; 5]; C = (8; 2018]$. Tìm:

- $A \cup B; A \cap B$.
- $A \setminus B; (A \cup B) \setminus C$.

Lời giải.

a) $A \cup B = [-2017; 9);$
 $A \cap B = (3; 5].$

b) $A \setminus B = (5; 9);$
 $(A \cup B) \setminus C = [-2017; 8].$

Bài 5. (1,0 điểm)

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 2,7182$ biết $\bar{a} = 2,7182 \pm 0,001$.

Lời giải. Do độ chính xác đến hàng phần nghìn nên số quy tròn là: 2,72.

IV. Đề số 2b**Bài 1. (3,0 điểm)**

- a) Mệnh đề sau đây đúng hay sai? giải thích.
 " Bình phương của một số thực đều lớn hơn chính nó."
- b) Dùng kí hiệu \forall để viết mệnh đề: " Mọi số thực bình phương đều lớn hơn 0. "
- c) Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 3x + 1 = 0.$ "

Lời giải.

- a) Số $0,1^2 = 0,01 < 0,1$
 Nên mệnh đề đã cho là sai.
- b) " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0.$ "
- c) Mệnh đề phủ định là: " $\forall x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 3x + 1 \neq 0.$ "

Bài 2. (2,0 điểm)

- a) Liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - x - 6 = 0\}.$
- b) Liệt kê các tập con của tập hợp $P = \{3, 5, 7\}$

Lời giải.

- a) $A = \{3\}.$
- b) Các tập con của tập hợp P là:
 $\emptyset; \{3\}; \{5\}; \{7\}; \{3, 5\}; \{3, 7\}; \{5, 7\}; \{3, 5, 7\}.$

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho hai tập hợp $A = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ và $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tìm: $A \cup B; A \cap B; B \setminus A; A \setminus B$.

Lời giải. $*A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$*A \cap B = \{5, 7, 8, 9\}$.

$*B \setminus A = \{6\}$.

$*A \setminus B = \{2, 3\}$.

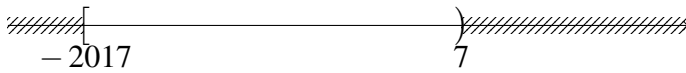
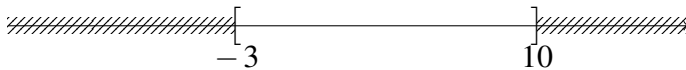
Bài 4. (2,0 điểm)

Cho các tập hợp $A = [-3; 10]; B = [-2017; 7]; C = (-10; 2017]$. Tìm:

a) $B \cup C; B \cap C$.

b) $A \setminus C; (A \cup B) \setminus C$.

Lời giải.



a) $B \cup C = [-2017; 2017]$;

$B \cap C = (-10; 7)$.

b) $A \setminus C = \emptyset$;

$(A \cup B) \setminus C = [-2017; -10]$.

Bài 5. (1,0 điểm)

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 3, 141592$ biết $\bar{a} = 3, 141592 \pm 0, 0001$.

Lời giải. Do độ chính xác đến hàng phân chục nghìn nên số quy tròn là: 3, 142.

V. Đề số 3a

Bài 1. (2,5 điểm) Cho mệnh đề $A : \forall k \in \mathbb{N}, k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 6".

a) Viết mệnh đề phủ định của mệnh đề A .

b) Chứng minh rằng mệnh đề A là một mệnh đề đúng.

Lời giải.

a) Mệnh đề phủ định của mệnh đề A là:

$\bar{A} : \exists k \in \mathbb{N}, k(k+1)(k+2)$ không chia hết cho 6..

b) Ta có $k(k+1)$ chia hết cho 2. .

Trong 3 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại một số chia hết cho 3 nên $k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 3.

Mà $(2, 3) = 1$ nên $k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 6.

Bài 2. (3,5 điểm) Cho hai tập hợp $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x+1| \leq 3\}$ và

$Y = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(x-2)(x^2-8x+15) = 0\}$

a) Viết các tập X, Y bằng cách liệt kê các phần tử.

b) Tìm $X \cap Y, X \cup Y$ và $X \setminus Y$.

Lời giải.

a) Ta có $|2x + 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x + 1 \leq 3$
 $\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow X = \{-2; -1; 0; 1\}$.

Ta lại có $(x + 1)(x - 2)(x^2 - 8x + 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x^2 - 8x + 15 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow Y = \{-1; 2; 3; 5\}$.

b) $X \cap Y = \{-1\}$
 $X \cup Y = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$
 $X \setminus Y = \{-2, 0, 1\}$

Bài 3. (2,0 điểm) Cho hai tập hợp $A = [m; m + 2]; B = [-1; 2]$.

- a) Khi $m = 0$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}A \cap B$.
 b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \subset B$.

Lời giải.

a) Với $m = 0$ thì $A = [0; 2] \Rightarrow C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
 Khi đó $C_{\mathbb{R}}A \cap B = [-1; 0)$.

b) Để $A \subset B$ thì $\begin{cases} m \geq -1 \\ m + 2 \leq 2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$

Bài 4. (1,0 điểm) Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10C1 có 45 học sinh trong đó có 17 bạn đạt học sinh giỏi Văn, 25 bạn đạt học sinh giỏi Toán và 13 bạn học sinh không đạt học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán của lớp 10C1.

Lời giải. Số bạn đạt học sinh giỏi: $45 - 13 = 32$ (học sinh).

Số học sinh giỏi cả Văn và Toán là: $25 + 17 - 32 = 10$ (học sinh).

Bài 5. (1,0 điểm) Bác nông dân đo mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài $4 \pm 0,2m$ và chiều rộng $3 \pm 0,3m$. Hỏi diện tích của mảnh vườn có thể lớn nhất là bao nhiêu (quy tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải. Chiều dài và chiều rộng lớn nhất lần lượt là $4,2m$ và $3,3m$.
 Diện tích lớn nhất của mảnh vườn là: $S = 4,2 \cdot 3,3 = 13,86 \approx 13,9m^2$.

VI. Đề số 3b

Bài 1. (2,5 điểm) Cho mệnh đề $A : "\forall k \in \mathbb{R}, k^2 + 3k + 5 > 0"$.

- a) Viết mệnh đề phủ định của mệnh đề A .
 b) Chứng minh rằng mệnh đề A là một mệnh đề đúng.

Lời giải.

a) Mệnh đề phủ định của mệnh đề A là:

$$\bar{A} : \exists k \in \mathbb{R}, k^2 + 3k + 5 \leq 0..$$

b) Ta có $k^2 + 3k + 5 = \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$

$$\forall k \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ nên } k^2 + 3k + 5 > 0, \forall k \in \mathbb{R}.$$

Bài 2. (3,5 điểm) Cho hai tập hợp $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 1| \leq 2\}$ và $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-1)(x^2 - 6x + 8) = 0\}$

a) Viết các tập X, Y bằng cách liệt kê các phần tử.

b) Tìm $X \cap Y, X \cup Y$ và $X \setminus Y$.

Lời giải.

a) Ta có $|2x - 1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2x - 1 \leq 2$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow X = \{0; 1\}.$$

$$\text{Ta lại có } x(x-1)(x^2 - 6x + 8) = 0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow Y = \{0; 1; 2; 4\}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } X \cap Y &= \{0, 1\} \\ X \cup Y &= \{0, 1, 2, 4\} \\ X \setminus Y &= \emptyset \end{aligned}$$

Bài 3. (2,0 điểm) Cho hai tập hợp $A = (m - 2; m + 1]; B = [-1; 4)$.

a) Khi $m = 2$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}A \cap B$.

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \subset B$.

Lời giải.

a) Với $m = 2$ thì $A = (0; 3] \Rightarrow C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } C_{\mathbb{R}}A \cap B = [-1; 0] \cup (3; 4).$$

b) Để $A \subset B$ thì $\begin{cases} m - 2 \geq -1 \\ m + 1 < 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 3$$

Bài 4. (1,0 điểm) Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 11C1 có 40 học sinh trong đó có 15 bạn đạt học sinh giỏi Tiếng Anh, 20 bạn đạt học sinh giỏi Lý và 10 bạn học sinh không đạt học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi cả Tiếng Anh và Lý của lớp 11C1.

Lời giải. Số bạn đạt học sinh giỏi: $40 - 10 = 30$ (học sinh).

Số học sinh giỏi cả Tiếng Anh và Lý là: $20 + 15 - 30 = 5$ (học sinh).

Bài 5. (1,0 điểm) Bác nông dân đo mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài $5 \pm 0,3$ m và chiều rộng $3 \pm 0,1$ m. Hỏi diện tích của mảnh vườn có thể nhỏ nhất là bao nhiêu (quy tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải. Chiều dài và chiều rộng nhỏ nhất lần lượt là 4,7m và 2,9m.

Diện tích nhỏ nhất của mảnh vườn là: $S = 4,7 \cdot 2,9 = 13,63 \approx 13,6$ m².

VII. Đề số 4a

Bài 1. Cho các câu sau:

1. Mở cửa ra!
 2. Chủ tịch Hồ Chí Minh sinh năm 1890.
 3. $2x - 1 < 0$.
 4. 2018 chia 3 dư 1.
 5. $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.
 6. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$.
- a) Trong các câu cho ở trên câu nào là mệnh đề? Với câu là mệnh đề hãy xác định xem mệnh đề đó đúng hay sai.
- b) Trong các câu cho ở trên, với câu là mệnh đề hãy nêu mệnh đề phủ định của nó.

Lời giải.

- a) Các câu là mệnh đề là: câu 2, câu 4, câu 5, câu 6. Các câu không phải là mệnh đề là: câu 1, câu 3. **0,5 điểm**
 Câu 2 là mệnh đề và là mệnh đề đúng.
 Câu 4 là mệnh đề và là mệnh đề sai.
 Câu 5 là mệnh đề và là mệnh đề đúng
 Câu 6 là mệnh đề và là mệnh đề sai. **0,5 điểm**
- b) P_2 : "Chủ tịch Hồ Chí Minh sinh năm 1890." $\Rightarrow \overline{P_2}$: "Chủ tịch Hồ Chí Minh không phải sinh năm 1890".
 P_4 : "2018 chia 3 dư 1". $\Rightarrow \overline{P_4}$: "2018 chia 3 không phải dư 1". **0,5 điểm**
 P_5 : " $\sqrt{3}$ là số vô tỉ". $\Rightarrow \overline{P_5}$: " $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ."
 P_6 : " $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ ". $\Rightarrow \overline{P_6}$: " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ ". **0,5 điểm**

Bài 2. Cho định lí có dạng mệnh đề kéo theo như sau: "Nếu một hình thang có hai đường chéo bằng nhau thì nó là hình thang cân".

- a) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề đã cho.
- b) Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu lại định lí đã cho.

Lời giải.

- a) Mệnh đề đảo của mệnh đề đã cho là: "Nếu một hình thang là hình thang cân thì nó có hai đường chéo bằng nhau". **0,5 điểm.**
- b) Định lí được phát biểu lại là: "Để một hình thang là hình thang cân, điều kiện đủ là hai đường chéo của nó bằng nhau". **0,5 điểm**

Bài 3. Cho hai tập hợp $A = \{-2; 1; 3; 4\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$. Hãy xác định:

- a) $A \cap B, A \cup B$.
- b) $A \setminus B, C_A(A \cap B)$.

Lời giải.

- a) Ta có $A \cap B = \{1; 3\}$ **0,5 điểm**
 $A \cup B = \{-2; 0; 1; 2; 3; 4\}$ **0,5 điểm**
- b) Ta có $A \setminus B = \{-2; 4\}$ **0,5 điểm**
 $C_A(A \cap B) = \{-2; 0; 2; 4\}$ **0,5 điểm**

Bài 4. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; m)$ và $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{36}{m}\right\}$.

- a) Khi $m = 1$, tìm $A \cap B$.
 b) Tìm $m < 0$ để $A \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải.

- a) Khi $m = 1$ có $A(-\infty; 1)$, $B = (36; +\infty)$ **0,5 điểm**
 $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ **0,5 điểm**
- b) $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{36}{m} < m \Leftrightarrow m^2 < 36$ (do $m < 0$) **0,5 điểm**
 $\Leftrightarrow (m - 6)(m + 6) < 0 \Leftrightarrow -6 < m < 6$.
 Kết hợp với điều kiện $m < 0$ ta được $-6 < m < 0$ **0,5 điểm**

Bài 5. Trong số 45 cán bộ của nhóm phiên dịch được triệu tập để phục vụ hội nghị quốc tế có 25 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 15 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 10 cán bộ vừa phiên dịch được tiếng Anh, vừa phiên dịch được tiếng Pháp. Hỏi

- a) Nhóm có bao nhiêu cán bộ được cấp thẻ đỏ, biết rằng muốn được cấp thẻ đỏ cán bộ đó phải phiên dịch được tiếng Anh hoặc phiên dịch được tiếng Pháp.
 b) Nhóm có bao nhiêu cán bộ không phiên dịch được tiếng Anh và không phiên dịch được tiếng Pháp.

Lời giải.

- a) Số cán bộ được cấp thẻ đỏ là $25 + 15 - 10 = 30$ **1,0 điểm**
- b) Số cán bộ không phiên dịch được tiếng Anh và không phiên dịch được tiếng Pháp chính là số cán bộ không được cấp thẻ đỏ và bằng: $45 - 30 = 15$ **1,0 điểm**

Bài 6. Tính độ dài cạnh hình vuông có độ dài đường chéo bằng 3, biết $\sqrt{2} \approx 1,414213562$ (lấy kết quả 3 chữ số thập phân).

Lời giải. Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông, áp dụng định lý Pi-ta-go ta có $x^2 + x^2 = 3$ **0,5 điểm**
 $\Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,121320344$. Vậy $x \approx 2,121$ **0,5 điểm**

VIII. Đề số 4b

Bài 1. Cho các câu sau:

1. Đóng cửa vào!
2. Chủ tịch Hồ Chí Minh ra đi tìm đường cứu nước vào năm 1911.
3. $2x - 1 \geq 0$.
4. 2018 chia hết cho 3.
5. $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ.
6. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$.

- a) Trong các câu cho ở trên câu nào là mệnh đề? Với câu là mệnh đề hãy xác định xem mệnh đề đó đúng hay sai.
- b) Trong các câu cho ở trên, với câu là mệnh đề hãy nêu mệnh đề phủ định của nó.

Lời giải.

- a) Các câu là mệnh đề là: câu 2, câu 4, câu 5, câu 6. Các câu không phải là mệnh đề là: câu 1, câu 3. **0,5 điểm**
 Câu 2 là mệnh đề và là mệnh đề đúng.
 Câu 4 là mệnh đề và là mệnh đề sai.
 Câu 5 là mệnh đề và là mệnh đề sai
 Câu 6 là mệnh đề và là mệnh đề đúng. **0,5 điểm**
- b) P_2 : "Chủ tịch Hồ Chí Minh ra đi tìm đường cứu nước vào năm 1911." $\Rightarrow \overline{P_2}$: "Chủ tịch Hồ Chí Minh không ra đi tìm đường cứu nước vào năm 1911".
 P_4 : "2018 chia hết cho 3". $\Rightarrow \overline{P_4}$: "2018 không chia hết cho 3". **0,5 điểm**
 P_5 : " $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ". $\Rightarrow \overline{P_5}$: " $\sqrt{3}$ là số vô tỉ."
 P_6 : " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ ". $\Rightarrow \overline{P_6}$: " $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ ". **0,5 điểm**

Bài 2. Cho định lí có dạng mệnh đề kéo theo như sau: "Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau".

- a) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề đã cho.
- b) Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu lại định lí đã cho.

Lời giải.

- a) Mệnh đề đảo của mệnh đề đã cho là: "Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau". **0,5 điểm.**
- b) Định lí được phát biểu lại là: "Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện cần để hai tam giác đó bằng nhau". **0,5 điểm**

Bài 3. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{-2; 0; 1; 2; 5\}$. Hãy xác định:

- a) $A \cap B, A \cup B$.
- b) $A \setminus B, C_A(A \cap B)$.

Lời giải.

- a) Ta có $A \cap B = \{1; 2\}$ **0,5 điểm**
 $A \cup B = \{-2; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ **0,5 điểm**
- b) Ta có $A \setminus B = \{3; 4\}$ **0,5 điểm**
 $C_B(A \cap B) = \{-2; 0; 5\}$ **0,5 điểm**

Bài 4. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; 2a)$ và $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{18}{a}\right\}$.

- a) Khi $a = 1$, tìm $A \cap B$.
- b) Tìm $a < 0$ để $A \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải.

- a) Khi $a = 1$ có $A(-\infty; 2)$, $B = (18; +\infty)$ **0,5 điểm**
 $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ **0,5 điểm**
- b) $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{18}{a} < 2a \Leftrightarrow a^2 < 9$ (do $a < 0$) **0,5 điểm**
 $\Leftrightarrow (a - 3)(a + 3) < 0 \Leftrightarrow -3 < a < 3$.
 Kết hợp với điều kiện $a < 0$ ta được $-3 < a < 0$ **0,5 điểm**

Bài 5. Trong số 50 cán bộ của nhóm phiên dịch được triệu tập để phục vụ hội nghị quốc tế có 35 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 20 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 15 cán bộ vừa phiên dịch được tiếng Anh, vừa phiên dịch được tiếng Pháp. Hỏi

- a) Nhóm có bao nhiêu cán bộ được cấp thẻ đỏ, biết rằng muốn được cấp thẻ đỏ cán bộ đó phải phiên dịch được tiếng Anh hoặc phiên dịch được tiếng Pháp.
- b) Nhóm có bao nhiêu cán bộ không phiên dịch được tiếng Anh và không phiên dịch được tiếng Pháp.

Lời giải.

- a) Số cán bộ được cấp thẻ đỏ là $35 + 20 - 15 = 40$ **1,0 điểm**
- b) Số cán bộ không phiên dịch được tiếng Anh và không phiên dịch được tiếng Pháp chính là số cán bộ không được cấp thẻ đỏ và bằng: $50 - 40 = 10$ **1,0 điểm**

Bài 6. Tính độ dài cạnh hình vuông có độ dài đường chéo bằng 5, biết $\sqrt{2} \approx 1,414213562$ (lấy kết quả 3 chữ số thập phân).

Lời giải. Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông, áp dụng định lý Pi-ta-go ta có $x^2 + x^2 = 5$ **0,5 điểm**
 $\Leftrightarrow x = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,535533906$. Vậy $x \approx 3,536$ **0,5 điểm**