

Mục lục

1	Hàm số lượng giác - Phương trình lượng giác	3
1.1	HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	3
1.1.1	LÝ THUYẾT	3
1.1.2	PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	5
	Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác	5
	Dạng 2. Tính chẵn lẻ của hàm số	8
	Dạng 3. Chu kỳ của hàm số lượng giác	10
	Dạng 4. Chứng minh T_0 là chu kỳ của một hàm số lượng giác	12
	Dạng 5. Bảng biến thiên và đồ thị của hàm số lượng giác	15
	Dạng 6. Sử dụng phép biến đổi đồng nhất và tính chất của hàm số lượng giác	15
	Dạng 7. Các bài toán sử dụng bất đẳng thức đã biết để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất	16
	Dạng 8. Các bài toán sử dụng tính đồng biến nghịch biến	16
	Dạng 9. Các bài toán liên quan đến $a \sin x + b \cos x = c$	16
1.1.3	BÀI TẬP TỰ LUYỆN	16
1.2	PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN CÓ ĐIỀU KIỆN	26
1.2.1	Tóm tắt lý thuyết	26
1.2.2	Kỹ năng cơ bản	28
1.2.3	Bài tập tự luận	28
1.2.4	Bài tập Trắc nghiệm	30
1.2.5	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	35
1.3	PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP	37
1.3.1	Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác	37
	Dạng 1. Một số dạng cơ bản phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác	37
1.3.2	Phương trình bậc nhất đối với \sin và \cos	40
	Dạng 2. Phương trình bậc nhất đối với \sin và \cos	40
1.3.3	Phương trình thuần nhất đối với \sin và \cos	43
	Dạng 3. Phương trình thuần nhất đối với \sin và \cos	43
1.4	PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỤC	47
	Dạng 1. Phương pháp đưa về tổng bình phương	47
	Dạng 2. Phương pháp đối lập	47
	Dạng 3. Phương pháp chứng minh nghiệm duy nhất	48
	Dạng 4. Phương pháp đặt ẩn phụ	49
	Dạng 5. Phương pháp đưa về hệ phương trình	49
	Dạng 6. Một số phương trình lượng giác có cách giải đặc biệt.	49
1.4.1	Phương trình lượng giác có nghiệm trên khoảng, đoạn	50
1.4.2	Dạng toán khác về phương trình lượng giác thường gặp	51

Chương 1

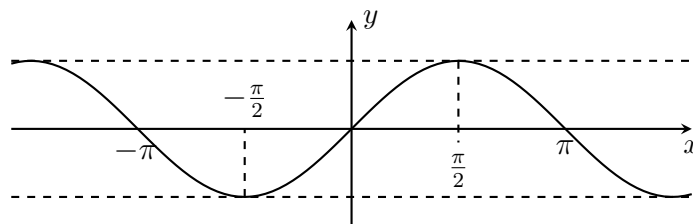
Hàm số lượng giác - Phương trình lượng giác

1.1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1.1.1 LÝ THUYẾT

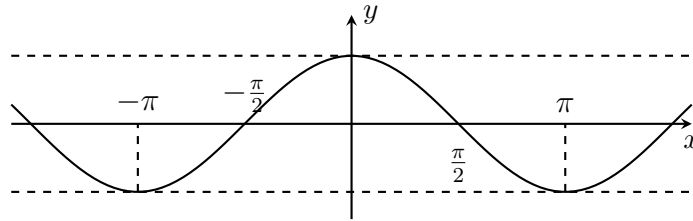
a) Hàm số $y = \sin x$.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.
- Đồ thị hàm số $y = \sin x$.



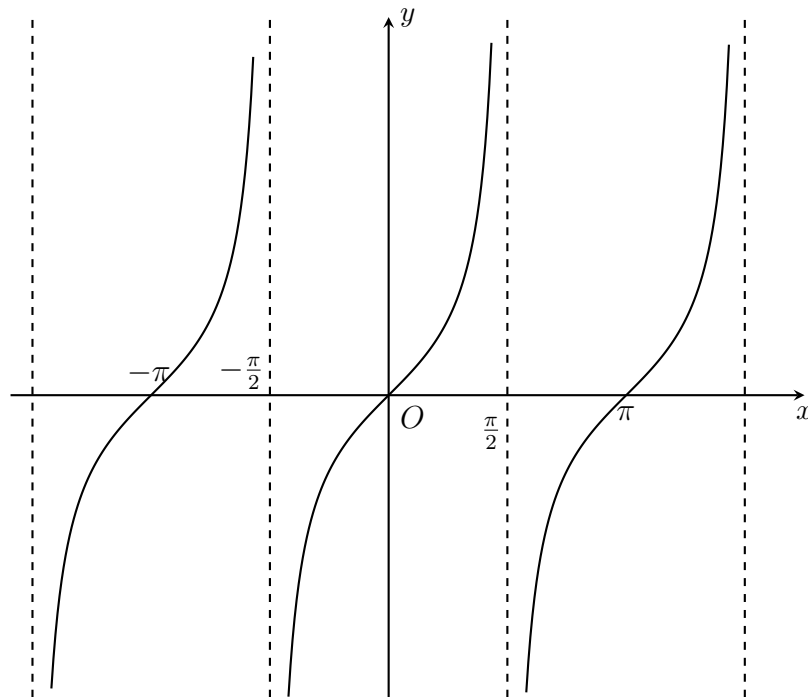
b) Hàm số $y = \cos x$.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.
- Đồ thị hàm số $y = \cos x$. Đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ theo véc tơ $\vec{v} = \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.



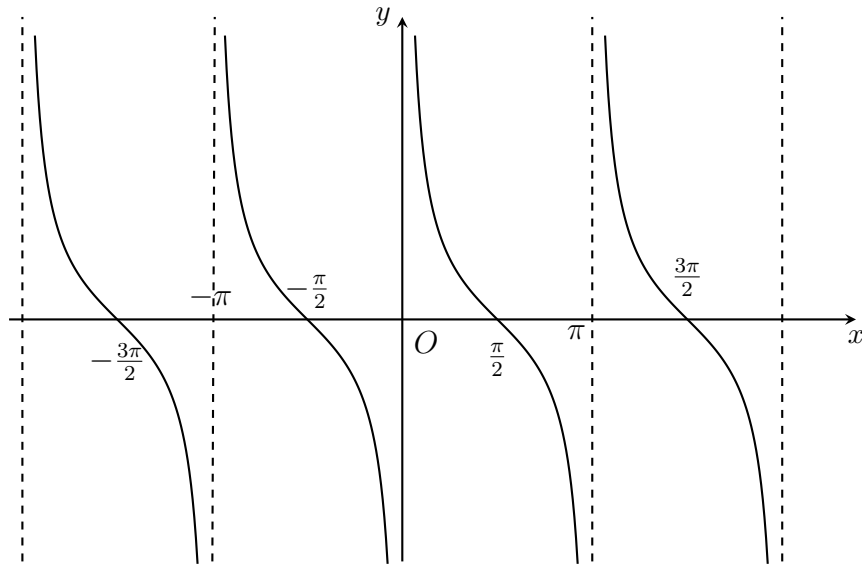
c) Hàm số $y = \tan x$.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập giá trị: \mathbb{R} .
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.
- Hàm đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$.
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận.
- Đồ thị



d) Hàm số $y = \cot x$.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Tập giá trị: \mathbb{R} .
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.
- Hàm nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$.
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận.
- Đồ thị



1.1.2 PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

- $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ xác định $\Leftrightarrow g(x) \neq 0$.
- $y = \sqrt[n]{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$.
- $y = \sin[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định.
- $y = \cos[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định.
- $y = \tan[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $y = \cot[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sin \frac{\pi^2}{2x-1}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = 3 \cot(2x+3)$.

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Ví dụ 4. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot^2\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right)$.

Ví dụ 5. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$. (5)

Ví dụ 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$. (6)

Ví dụ 7. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3 - 2 \cos x}$. (7)

Ví dụ 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$.

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - 3 \cos x}{\sin x}$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \frac{3}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Câu 5. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2 \sin x + 1}{1 - \cos x}$ là

- A. $x \neq k2\pi$. B. $x \neq k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 6. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$. B. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2x}{1 - \sin^2 x}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\cot x - \sqrt{3}}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi; l\pi \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + l\pi \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + l\pi \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 10. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 + \cot^2 x}{1 - \sin 3x}}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi; \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3} \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3} \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi; \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{5} \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi; \frac{\pi}{5} + n\frac{2\pi}{3} \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 11. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \tan 2x$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 12. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\sin x + 1}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 13. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x \neq k2\pi$. C. $x \neq k\pi$. D. $x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Câu 14. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{\sqrt{2 - \sin 6x}}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 15. Hàm số $y = \sqrt{\cos x - 1} + 1 - \cos^2 x$ xác định khi và chỉ khi

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = 0$.
 C. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 16. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12} + l\frac{\pi}{2} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{5} + l\frac{\pi}{2} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} + l\frac{\pi}{2} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{12} + l\frac{\pi}{2} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 17. Tập xác định của hàm số $y = \cot \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7\pi}{6} + k\pi, k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 18. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \cos 3x}{1 + \sin 4x}}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 19. Tìm tất cả giá trị m để hàm số $y = \sqrt{\sin x + m}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- A. $m > 1$. B. $m < -1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m \geq 1$.

Câu 20. Hàm số $y = \frac{2 - \sin 2x}{\sqrt{m \cos x + 1}}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

- A. $m > 0$. B. $0 < m < 1$. C. $m \neq -1$. D. $-1 < m < 1$.

Dạng 2. Tính chẵn lẻ của hàm số

Phương pháp giải

Ta thực hiện các bước sau: Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số, khi đó

- Nếu \mathcal{D} là tập đối xứng (tức là $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$), ta thực hiện bước 2.
- Nếu \mathcal{D} là không tập đối xứng (tức là $\exists x \in \mathcal{D}$ mà $-x \notin \mathcal{D}$), ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

Xác định $f(-x)$, khi đó:

- Nếu $f(-x) = f(x)$ kết luận hàm số là hàm chẵn.
- Nếu $f(-x) = -f(x)$ kết luận hàm số là hàm lẻ.
- Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ

Chú ý:

- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 9. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $y = f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right)$ b) $y = f(x) = \tan x + \cot x$

Ví dụ 10. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \tan^7 2x \sin 5x$.

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Cho 2 hàm số $f(x) = \sin 4x$ và $g(x) = \tan |2x|$, khi đó:

- $f(x)$ là hàm số chẵn và $g(x)$ là hàm số lẻ.
- $f(x)$ và g là 2 hàm số lẻ.
- $f(x)$ là hàm số lẻ và $g(x)$ là hàm số chẵn.
- $f(x)$ và $g(x)$ là 2 hàm số chẵn.

Câu 2. Cho 2 hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \cos 2x$.

- $f(x)$ và $g(x)$ là 2 hàm số chẵn.
- $f(x)$ và $g(x)$ là 2 hàm số lẻ.
- $f(x)$ là hàm số chẵn và $g(x)$ là hàm số lẻ.
- $f(x)$ là hàm số lẻ và $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 3. Cho 2 hàm số $f(x) = \tan 4x$ và $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó:

- A. $f(x)$ và $g(x)$ là 2 hàm số lẻ.
- B. $f(x)$ là hàm số chẵn và $g(x)$ là hàm số lẻ.
- C. $f(x)$ và $g(x)$ là 2 hàm số chẵn.
- D. $f(x)$ là hàm số lẻ và $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 4. Cho hàm số $y = 2 \sin x + 9$. Hàm số này là:

- A. Hàm số không chẵn không lẻ.
- B. Hàm số lẻ và có tập xác định là.
- C. Hàm số chẵn.
- D. Hàm số lẻ.

Câu 5. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn.

- A. $y = \sin |2016x| + \cos 2017x$.
- B. $y = \cot 2015x - 2016 \sin x$.
- C. $y = \tan 2016x + \cot 2017x$.
- D. $y = 2016 \cos x + 2017 \sin x$.

Câu 6. Tìm hàm số chẵn

- A. $y = \sin x$.
- B. $y = \cot x$.
- C. $y = \cos x$.
- D. $y = \tan x$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$ và $g(x) = \tan 3x$. chọn mệnh đề đúng

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.
- B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ.
- C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
- D. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 8. Hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
- B. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
- C. $y = \sin 2x$.
- D. $y = \tan x - \sin 2x$.

Câu 9. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn

- A. $y = \tan 3x \cos x$.
- B. $y = \sin^2 x + \cos x$.
- C. $y = \sin^2 x + \sin x$.
- D. $y = \sin^2 x + \tan x$.

Câu 10. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn

- A. $y = \sin 3x$.
- B. $y = x \cos x$.
- C. $y = \cos x \tan 2x$.
- D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 11. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = -\sin x$.
- B. $y = \cos x - \sin x$.
- C. $y = \cos x + \sin^2 x$.
- D. $y = \cos x \sin x$.

Câu 12. Trong các hàm số sau hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin 2x$.
- B. $y = \cos 3x$.
- C. $y = \cot 4x$.
- D. $y = \tan 5x$.

Câu 13. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin 2x$.
- B. $y = x \cos x$.
- C. $y = \cos x \cot x$.
- D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 14. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

- A. $y = \sin x \cos 2x$.
- B. $y = \sin^3 x \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- C. $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$.
- D. $y = \cos x \sin^3 x$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \tan^2 x$. Chọn mệnh đề đúng

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.
- B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
- C. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.
- D. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

Ví dụ 12. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$.

Ví dụ 13. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau: $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

Ví dụ 14. Chứng minh rằng hàm số sau là hàm số tuần hoàn và tìm chu kì của nó:
 $y = \frac{1}{\sin x}$.

Ví dụ 15. Cho a, b, c, d là các số thực khác 0. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = a \sin cx + b \cos dx$ là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi $\frac{c}{d}$ là số hữu tỉ.

Ví dụ 16. Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số tuần hoàn với chu kỳ lần lượt là T_1, T_2 . Chứng minh rằng nếu $\frac{T_1}{T_2}$ là số hữu tỉ thì các hàm số $f(x) \pm g(x); f(x) \cdot g(x)$ là những hàm số tuần hoàn.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 19. Hàm số $y = \cos^2 x - 1$ tuần hoàn với chu kì

- A. π . B. 2π . C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 20. Hàm số $y = 2 \sin x \cdot \cos 3x$ tuần hoàn với chu kì

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. 2π . C. $\frac{\pi}{2}$. D. π .

Câu 21. Hàm số $y = \cos^2 x + \sin^2 x$ tuần hoàn với chu kì

- A. 2π . B. π . C. $\frac{3\pi}{2}$. D. Không có chu kì.

Câu 22. Hàm số $y = 2 \cos^2 x + 3 \cos^3 x + 8 \cos^4 x$ tuần hoàn với chu kì

- A. π . B. 2π . C. 3π . D. 4π .

Câu 23. Hàm số $y = 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x + 6 \sin x \cos x$ tuần hoàn với chu kì

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. 2π . C. π . D. $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 24. Hàm số $y = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - 2 \sin^2 x}$ tuần hoàn với chu kì

- A. 2π . B. $4\pi^2$. C. 3π . D. π .

Dạng 4. Chứng minh T_0 là chu kì của một hàm số lượng giác**Phương pháp giải**

Chứng minh T_0 là chu kì của một hàm số lượng giác $y = f(x)$ tức là chứng minh T_0 là số nhỏ nhất trong các số T thỏa mãn: “ $\forall x \in \mathcal{D}$ ta có: $x + T \in \mathcal{D}$, $x - T \in \mathcal{D}$ và $f(x + T) = f(x)$ ”. Ta cần chứng minh:

Bước 1: $\forall x \in \mathcal{D}$, $f(x + T) = f(x)$.

Bước 2: Giả sử có số a : $0 < a < T$ sao cho: $f(x + a) = f(x), \forall x \in \mathcal{D}$. Chọn giá trị $x = x_0$

thích hợp sao cho $f(x_0 + a) = f(a)$ và từ $f(a) = f(x_0)$ tìm ra mâu thuẫn nào đó để chứng tỏ rằng không có số a như trên.

Ví dụ 17. Chứng minh rằng hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Ví dụ 18. Chứng minh rằng hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 19. Chứng minh rằng hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{7}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ 4π .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 25. Khẳng định nào sau đây là sai về tính tuần hoàn và chu kỳ của các hàm số?

- A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ 2π .
- B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ π .
- C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ π .
- D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ π .

Câu 26. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = x \cos x$.
- B. $y = x - \tan x$.
- C. $y = -\sqrt{2} \tan x + 1$.
- D. $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Câu 27. Trong các hàm số sau, hàm số nào không tuần hoàn?

- A. $y = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$.
- B. $y = \sin 5x + 3 \cos 7x$.
- C. $y = \tan^2 2x + 1$.
- D. $y = 3 \sin 2x - \sqrt{2}$.

Câu 28. Trong các hàm số sau, hàm số nào không tuần hoàn?

- A. $y = x \cos^2 x$.
- B. $y = \cos^2 x$.
- C. $y = x^2 - \cos^2 x$.
- D. $y = x^2$.

Câu 29. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = \sin x - x$.
- B. $y = -2 \cos 3x + 1$.
- C. $y = x \sin 3x$.
- D. $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Câu 30. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = \sin 2x + 3x$.
- B. $y = (3 - x) \tan x$.
- C. $y = \cos 3x(1 + \cos x)$.
- D. $y = \cos \sqrt{x}$.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ (nếu có) của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$.

b) $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

Bài 2. Chứng minh rằng mỗi hàm số sau đều tuần hoàn với chu kỳ π .

a) $y = -\cos^2 x$.

b) $y = 3 \tan^2 x + 1$.

Bài 3. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ (nếu có) của các hàm số lượng giác sau:

a) $y = \sin x^2$.

$$b) y = \frac{\sin 3x}{1 + \sin x}.$$

Bài 4. Chứng minh rằng các hàm số sau là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0 .

$$a) y = \sin x, T_0 = 2\pi.$$

$$b) y = \tan 2x, T_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Bài 5. Chứng minh rằng các hàm số sau là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0 .

$$a) y = \sin 3x, T_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$b) y = |\cos 2x|, T_0 = \frac{\pi}{2}$$

ĐÁP ÁN

1 D	6 D	11 C	16 A	1 C	6 C	11 C	16 A	21 D	26 C
2 D	7 D	12 C	17 B	2 D	7 D	12 B	17 A	22 B	27 A
3 C	8 B	13 D	18 A	3 D	8 A	13 D	18 C	23 B	28 B
4 C	9 B	14 B	19 D	4 A	9 B	14 B	19 A	24 D	29 B
5 A	10 A	15 D	20 D	5 A	10 D	15 B	20 D	25 B	30 C

SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Dạng 5. Bảng biến thiên và đồ thị của hàm số lượng giác

✎ Hàm số $y = \sin x$:

- Đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

✎ Hàm số $y = \cos x$:

- Đồng biến trên các khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

✎ Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

✎ Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

! Với các hàm số lượng giác phức tạp, để xét tính đơn điệu của nó ta sử dụng định nghĩa.

Phương pháp giải

💡 Vẽ vòng tròn lượng giác.

💡 Biểu diễn các cung lượng giác trên vòng tròn lượng giác.

💡 Dựa vào định nghĩa của các hàm số lượng giác để xét các khoảng đồng biến nghịch biến của hàm số lượng giác.

Ví dụ 20. Xét tính tăng giảm và lập bảng biến thiên của các hàm số lượng giác sau

a) $y = 2 \sin x$ trên $(0; \pi)$;

c) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$;

b) $y = \sin 2x$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

d) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Dạng 6. Sử dụng phép biến đổi đồng nhất và tính chất của hàm số lượng giác

Ví dụ 21. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

a) $y = 4 \sin x \cos x + 1$

b) $y = 4 - 3 \sin^2 2x$

Ví dụ 22. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số sau $y = \sin x - \frac{1}{\sin x}$ trong khoảng $0 < x < \pi$.

Dạng 7. Các bài toán sử dụng bất đẳng thức đã biết để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Ví dụ 23. $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cos^2 x} + \frac{1}{2} \sqrt{5 + 2 \sin^2 x}$.

Ví dụ 24. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{2 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Dạng 8. Các bài toán sử dụng tính đồng biến nghịch biến

Ví dụ 25. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

a) $y = 6 \cos^2 x + \cos^2 2x$.

b) $y = (4 \sin x - 3 \cos x)^2 - 4(4 \sin x - 3 \cos x) + 1$.

Dạng 9. Các bài toán liên quan đến $a \sin x + b \cos x = c$

Ví dụ 26. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1$.

Ví dụ 27. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$.

1.1.3 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $y = \sin x$

A. đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi + k2\pi; k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

B. đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2} + k2\pi; \frac{5\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

C. đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

D. đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2. Hàm số $y = \cos x$

A. đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi + k2\pi; k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

B. đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

C. đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

D. đồng biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(\pi + k2\pi; 3\pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Hàm số $y = \sqrt{3} + 2 \cos x$ tăng trên khoảng

A. $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$. B. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. C. $\left(\frac{7\pi}{6}; 2\pi\right)$. D. $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 4. Hàm số nào đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$?

A. $y = \cos x$. B. $y = \cot 2x$. C. $y = \sin x$. D. $y = \cos 2x$.

Câu 5. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số $y = \sin x$ tăng trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số $y = \cot x$ giảm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số $y = \tan x$ tăng trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số $y = \cos x$ tăng trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 6. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên

A. khoảng $(0; \pi)$.

B. các khoảng $\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

C. các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

D. khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Câu 7. Hàm số $y = \cos x$

A. tăng trong $[0; \pi]$.

B. tăng trong $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và giảm trong $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

C. nghịch biến $[0; \pi]$.

D. các khẳng định trên đều sai.

Câu 8. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên đoạn nào dưới đây?

A. $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

B. $[\pi; 2\pi]$.

C. $[-\pi; \pi]$.

D. $[0; \pi]$.

Câu 9. Hàm số nào sau đây có tính đơn điệu trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khác với các hàm số còn lại?

A. $y = \sin x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \tan x$.

D. $y = -\cot x$.

Câu 10. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

B. $(\pi; 2\pi]$.

C. $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$.

D. $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 11. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
 B. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
 C. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.
 D. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 12. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \tan x$. D. $y = -\cot x$.

Câu 13. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

- A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \cot x$. D. $y = \tan x$.

Câu 14. Xét hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; 0]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
 B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Câu 15. Xét hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.
 B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.
 D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

Câu 16. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \tan 2x$ trên một chu kỳ tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 C. Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
 D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 17. Xét sự biến thiên của hàm số $y = 1 - \sin x$ trên một chu kỳ tuần hoàn của nó. Trong các kết luận sau, kết luận nào sai?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
 B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
 D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Câu 18. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sin x - \cos x$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

C. Hàm số đã cho có tập giá trị $[-1; 1]$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

Câu 19. Chọn câu đúng.

A. Hàm số $y = \tan x$ luôn luôn tăng.

B. Hàm số $y = \tan x$ luôn luôn tăng trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số $y = \tan x$ tăng trong các khoảng $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi)$.

D. Hàm số $y = \tan x$ tăng trong các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$.

Câu 20. Xét hai mệnh đề sau:

(I): $\forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ giảm.

(II): $\forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ giảm.

Mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (II) đúng.

C. Cả (I) và (II) sai.

D. Cả (I) và (II) đúng.

Câu 21. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $y = |\tan x|$ đồng biến trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

B. $y = |\tan x|$ là hàm số chẵn trên $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $y = |\tan x|$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

D. $y = |\tan x|$ nghịch biến trên đoạn $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 22. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên đoạn nào dưới đây

A. $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

B. $[\pi; 2\pi]$.

C. $[-\pi; \pi]$.

D. $[0; \pi]$.

Câu 23. Hàm số nào sau đây có tính đơn điệu trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khác với các hàm số còn lại?

A. $y = \sin x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \tan x$.

D. $y = -\cot x$.

Câu 24. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

B. $(\pi; 2\pi]$.

C. $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$.

D. $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 25. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

B. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

C. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

D. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 26. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. $y = \sin x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \tan x$.

D. $y = -\cot x$.

Câu 27. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

A. $y = \sin x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \cot x$.

D. $y = \tan x$.

Câu 28. Xét hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; 0]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\pi; -\frac{\pi}{2})$ và $(-\frac{\pi}{2}; 0)$.
- B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\pi; -\frac{\pi}{2})$; nghịch biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}; 0)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\pi; -\frac{\pi}{2})$; đồng biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\pi; -\frac{\pi}{2})$ và $(-\frac{\pi}{2}; 0)$.

Câu 29. Xét hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.
- B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.
- D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

Câu 30. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \tan 2x$ trên một chu kì tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$ và $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$ và nghịch biến trên khoảng $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$.
- C. Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$ và đồng biến trên khoảng $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$.

Câu 31. Xét sự biến thiên của hàm số $y = 1 - \sin x$ trên một chu kì tuần hoàn của nó. Trong các kết luận sau, kết luận nào sai?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}; 0)$.
- B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2}; \pi)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$.

Câu 32. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sin x - \cos x$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4})$.
- C. Hàm số đã cho có tập giá trị $[-1; 1]$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4})$.

Câu 33. Chọn câu đúng.

- A. Hàm số $y = \tan x$ luôn luôn tăng.
- B. Hàm số $y = \tan x$ luôn luôn tăng trên từng khoảng xác định.
- C. Hàm số $y = \tan x$ tăng trong các khoảng $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi)$.
- D. Hàm số $y = \tan x$ tăng trong các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$.

Câu 34. Xét hai mệnh đề sau:

(I): $\forall x \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$, hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ giảm.

(II): $\forall x \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$, hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ giảm.

Mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng.
 C. Cả (I) và (II) sai. D. Cả (I) và (II) đúng.

Câu 35. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $y = |\tan x|$ đồng biến trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
 B. $y = |\tan x|$ là hàm số chẵn trên $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $y = |\tan x|$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.
 D. $y = |\tan x|$ nghịch biến trên đoạn $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

- a) $y = (2 - \sqrt{3}) \sin 2x + \cos 2x$.
 b) $y = (\sin x - \cos x)^2 + 2 \cos 2x + 3 \sin x \cos x$.
 c) $y = (\sin x - 2 \cos x)(2 \sin x + \cos x) - 1$.
 d) $y = 4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x$.

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau,

- a) $y = a \sin x + b \cos x$ (a và b là hằng số, $a^2 + b^2 \neq 0$).
 b) $y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ (a, b, c hằng số).

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

- a) $y = 3 \sin x - 4 \cos x + 7$.
 b) $y = \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 5$.
 c) $y = 2 \sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x + 3$.
 d) $y = \frac{\sin x + 3 \cos x - 5}{\sin x + \cos x + 2}$.

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

- a) $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. b) $y = \sqrt{4 - 2 \sin^5(2x)} - 8$.
 c) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$. d) $y = \cos \left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 2x$.
 e) $y = \cos 2x + 4 \sin x$. f) $y = \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}$.
 g) $y = 3 \cos x + 2$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. h) $y = \tan x, x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$.
 i) $y = \tan^2 x - \tan x + 2, x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. j) $y = 2 \sin^2 x - \sin 2x + 7$.

Bài 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau trên khoảng đã chỉ ra:

a) $y = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0; \pi)$. b) $y = \frac{(\sin x + \cos x)^3}{\cos x \sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$.

Bài 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số sau chỉ nhận giá trị dương:

$$y = (3 \sin x - 4 \cos x)^2 - 6 \sin x + 8 \cos x + 2m - 1.$$

Bài 12. Tìm m để hàm số $y = \sqrt{2 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - (3 + 2m) \cos^2 x} + 2$ xác định với mọi x .

Bài 13. Cho các góc nhọn x, y thỏa mãn $\sin^2 x + \sin^2 y = \sin(x + y)$ (*). Chứng minh rằng: $x + y = \frac{\pi}{2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2 \sin x + 3}$.

- A. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 1$. B. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2\sqrt{5}$.
C. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2$. D. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 3$.

Câu 2. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 - \sqrt{2 \cos^2 x + 1}$.

- A. $\max y = 1, \min y = 1 - \sqrt{3}$. B. $\max y = 3, \min y = 1 - \sqrt{3}$.
C. $\max y = 2, \min y = 1 - \sqrt{3}$. D. $\max y = 0, \min y = 1 - \sqrt{3}$.

Câu 3. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $\min y = -2, \max y = 4$. B. $\min y = 2, \max y = 4$.
C. $\min y = -2, \max y = 3$. D. $\min y = -1, \max y = 4$.

Câu 4. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2 \cos^2 3x$.

- A. $\min y = 1, \max y = 2$. B. $\min y = 1, \max y = 3$.
C. $\min y = 2, \max y = 3$. D. $\min y = -1, \max y = 3$.

Câu 5. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + \sqrt{2 + \sin 2x}$.

- A. $\min y = 2, \max y = 1 + \sqrt{3}$. B. $\min y = 2, \max y = 2 + \sqrt{3}$.
C. $\min y = 1, \max y = 1 + \sqrt{3}$. D. $\min y = 1, \max y = 2$.

Câu 6. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{4}{1 + 2 \sin^2 x}$.

- A. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 4$. B. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 3$.
C. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 2$. D. $\min y = \frac{1}{2}, \max y = 4$.

Câu 7. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2 \sin^2 x + \cos^2 2x$.

- A. $\max y = 4, \min y = \frac{3}{4}$. B. $\max y = 3, \min y = 2$.
C. $\max y = 4, \min y = 2$. D. $\max y = 3, \min y = \frac{3}{4}$.

Câu 8. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 \sin x + 4 \cos x + 1$.

- A. $\max y = 6, \min y = -2$. B. $\max y = 4, \min y = -4$.
C. $\max y = 6, \min y = -4$. D. $\max y = 6, \min y = -1$.

Câu 9. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 \sin x + 4 \cos x - 1$.

- A. $\min y = -6; \max y = 4$. B. $\min y = -6; \max y = 5$.
C. $\min y = -3; \max y = 4$. D. $\min y = -6; \max y = 6$.

Câu 10. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2 \sin^2 x + 3 \sin 2x - 4 \cos^2 x$

- A. $\min y = -3\sqrt{2} - 1; \max y = 3\sqrt{2} + 1$. B. $\min y = -3\sqrt{2} - 1; \max y = 3\sqrt{2} - 1$.
C. $\min y = -3\sqrt{2}; \max y = 3\sqrt{2} - 1$. D. $\min y = -3\sqrt{2} - 2; \max y = 3\sqrt{2} - 1$.

Câu 11. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sin^2 x + 3 \sin 2x + 3 \cos^2 x$

- A. $\max y = 2 + \sqrt{10}$; $\min y = 2 - \sqrt{10}$. B. $\max y = 2 + \sqrt{5}$; $\min y = 2 - \sqrt{5}$.
 C. $\max y = 2 + \sqrt{2}$; $\min y = 2 - \sqrt{2}$. D. $\max y = 2 + \sqrt{7}$; $\min y = 2 - \sqrt{7}$.

Câu 12. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2 \sin 3x + 1$.

- A. $\min y = -2$, $\max y = 3$. B. $\min y = -1$, $\max y = 2$.
 C. $\min y = -1$, $\max y = 3$. D. $\min y = -3$, $\max y = 3$.

Câu 13. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 4 \cos^2 2x$.

- A. $\min y = -1$, $\max y = 4$. B. $\min y = -1$, $\max y = 7$.
 C. $\min y = -1$, $\max y = 3$. D. $\min y = -2$, $\max y = 7$.

Câu 14. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 2\sqrt{4 + \cos 3x}$.

- A. $\min y = 1 + 2\sqrt{3}$, $\max y = 1 + 2\sqrt{5}$. B. $\min y = 2\sqrt{3}$, $\max y = 2\sqrt{5}$.
 C. $\min y = 1 - 2\sqrt{3}$, $\max y = 1 + 2\sqrt{5}$. D. $\min y = -1 + 2\sqrt{3}$, $\max y = -1 + 2\sqrt{5}$.

Câu 15. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 4 \sin 6x + 3 \cos 6x$.

- A. $\min y = -5$, $\max y = 5$. B. $\min y = -4$, $\max y = 4$.
 C. $\min y = -3$, $\max y = 5$. D. $\min y = -6$, $\max y = 6$.

Câu 16. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{3}{1 + \sqrt{2 + \sin^2 x}}$.

- A. $\min y = \frac{-3}{1 + \sqrt{3}}$, $\max y = \frac{3}{1 + \sqrt{2}}$. B. $\min y = \frac{3}{1 + \sqrt{3}}$, $\max y = \frac{3}{1 + \sqrt{2}}$.
 C. $\min y = \frac{2}{1 + \sqrt{3}}$, $\max y = \frac{3}{1 + \sqrt{2}}$. D. $\min y = \frac{3}{1 + \sqrt{3}}$, $\max y = \frac{3}{1 + \sqrt{2}}$.

Câu 17. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{3 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 4 \cos^2 x + 1}$.

- A. $\min y = \frac{-6 - 3\sqrt{5}}{4}$, $\max y = \frac{-6 + 3\sqrt{5}}{4}$. B. $\min y = \frac{-4 - 3\sqrt{5}}{4}$, $\max y = \frac{-4 + 3\sqrt{5}}{4}$.
 C. $\min y = \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{4}$, $\max y = \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{4}$. D. $\min y = \frac{-5 - \sqrt{65}}{4}$, $\max y = \frac{-5 + \sqrt{65}}{4}$.

Câu 18. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2 \cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) + 3$.

- A. $\min y = 2$, $\max y = 5$. B. $\min y = 1$, $\max y = 4$.
 C. $\min y = 1$, $\max y = 5$. D. $\min y = 1$, $\max y = 3$.

Câu 19. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{3 - 2 \sin^2 2x} + 4$.

- A. $\min y = 6$, $\max y = 4 + \sqrt{3}$. B. $\min y = 5$, $\max y = 4 + 2\sqrt{3}$.
 C. $\min y = 5$, $\max y = 4 + 3\sqrt{3}$. D. $\min y = 5$, $\max y = 4 + \sqrt{3}$.

Câu 20. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x}$.

- A. $\min y = 0$, $\max y = 3$. B. $\min y = 0$, $\max y = 4$.
 C. $\min y = 0$, $\max y = 6$. D. $\min y = 0$, $\max y = 2$.

Câu 21. Tìm tập giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \tan^2 x - 4 \tan x + 1$.

- A. $\min y = -2$. B. $\min y = -3$. C. $\min y = -4$. D. $\min y = -1$.

Câu 22. Tìm tập giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \tan^2 x + \cot^2 x + 3(\tan x + \cot x) - 1$.

- A. $\min y = -5$. B. $\min y = -3$. C. $\min y = -2$. D. $\min y = -4$.

Câu 23. Tìm m để hàm số $y = \sqrt{5 \sin 4x - 6 \cos 4x + 2m - 1}$ xác định với mọi x .

- A. $m \geq 1$. B. $m \geq \frac{\sqrt{61} - 1}{2}$. C. $m < \frac{\sqrt{61} + 1}{2}$. D. $m \geq \frac{\sqrt{61} + 1}{2}$.

Câu 24. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2 + 3 \sin 3x$.

- A. $\min y = -2$; $\max y = 5$. B. $\min y = -1$; $\max y = 4$.
 C. $\min y = -1$; $\max y = 5$. D. $\min y = -5$; $\max y = 5$.

Câu 25. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 - 4 \sin^2 2x$.

- A. $\min y = -2$; $\max y = 1$. B. $\min y = -3$; $\max y = 5$.
C. $\min y = -5$; $\max y = 1$. D. $\min y = -3$; $\max y = 1$.

Câu 26. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + \sqrt{3 + 2 \sin x}$.

- A. $\min y = -2$; $\max y = 1 + \sqrt{5}$. B. $\min y = 2$; $\max y = \sqrt{5}$.
C. $\min y = 2$; $\max y = 1 + \sqrt{5}$. D. $\min y = 2$; $\max y = 4$.

Câu 27. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 + 2\sqrt{2 + \sin^2 4x}$.

- A. $\min y = 3 + 2\sqrt{2}$; $\max y = 3 + 2\sqrt{3}$. B. $\min y = 2 + 2\sqrt{2}$; $\max y = 3 + 2\sqrt{3}$.
C. $\min y = 3 - 2\sqrt{2}$; $\max y = 3 + 2\sqrt{3}$. D. $\min y = 3 + 2\sqrt{2}$; $\max y = 3 + 3\sqrt{3}$.

Câu 28. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 4 \sin 3x - 3 \cos 3x + 1$.

- A. $\min y = -3$; $\max y = 6$. B. $\min y = -4$; $\max y = 6$.
C. $\min y = -4$; $\max y = 4$. D. $\min y = -2$; $\max y = 6$.

Câu 29. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x + 4$.

- A. $\min y = 2$; $\max y = 4$. B. $\min y = 2$; $\max y = 6$.
C. $\min y = 4$; $\max y = 6$. D. $\min y = 2$; $\max y = 8$.

Câu 30. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{\sin 2x + 2 \cos 2x + 3}{2 \sin 2x - \cos 2x + 4}$.

- A. $\min y = -\frac{2}{11}$; $\max y = 2$. B. $\min y = \frac{2}{11}$; $\max y = 3$.
C. $\min y = \frac{2}{11}$; $\max y = 4$. D. $\min y = \frac{2}{11}$; $\max y = 2$.

Câu 31. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{2 \sin^2 3x + 4 \sin 3x \cos 3x + 1}{\sin 6x + 4 \cos 6x + 10}$.

- A. $\min y = \frac{11 - 9\sqrt{7}}{83}$; $\max y = \frac{11 + 9\sqrt{7}}{83}$. B. $\min y = \frac{22 - 9\sqrt{7}}{11}$; $\max y = \frac{22 + 9\sqrt{7}}{11}$.
C. $\min y = \frac{33 - 9\sqrt{7}}{83}$; $\max y = \frac{33 + 9\sqrt{7}}{83}$. D. $\min y = \frac{22 - 9\sqrt{7}}{83}$; $\max y = \frac{22 + 9\sqrt{7}}{83}$.

Câu 32. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 \cos x + \sin x - 2$.

- A. $\min y = -2 - \sqrt{5}$; $\max y = -2 + \sqrt{5}$. B. $\min y = -2 - \sqrt{7}$; $\max y = -2 + \sqrt{7}$.
C. $\min y = -2 - \sqrt{3}$; $\max y = -2 + \sqrt{3}$. D. $\min y = -2 - \sqrt{10}$; $\max y = -2 + \sqrt{10}$.

Câu 33. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{\sin^2 2x + 3 \sin 4x}{2 \cos^2 2x - \sin 4x + 2}$.

- A. $\min y = \frac{5 - \sqrt{97}}{4}$; $\max y = \frac{5 + \sqrt{97}}{4}$. B. $\min y = \frac{5 - \sqrt{97}}{18}$; $\max y = \frac{5 + \sqrt{97}}{18}$.
C. $\min y = \frac{5 - \sqrt{97}}{8}$; $\max y = \frac{5 + \sqrt{97}}{8}$. D. $\min y = \frac{7 - \sqrt{97}}{8}$; $\max y = \frac{7 + \sqrt{97}}{8}$.

Câu 34. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3(3 \sin x + 4 \cos x)^2 + 4(3 \sin x + 4 \cos x) + 1$.

- A. $\min y = \frac{1}{3}$; $\max y = 96$. B. $\min y = \frac{1}{3}$; $\max y = 6$.
C. $\min y = -\frac{1}{3}$; $\max y = 96$. D. $\min y = 2$; $\max y = 6$.

Câu 35. Tìm m để các bất phương trình $(3 \sin x - 4 \cos x)^2 - 6 \sin x + 8 \cos x \geq 2m - 1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m > 0$. B. $m \leq 0$. C. $m < 0$. D. $m \leq 1$.

Câu 36. Tìm m để các bất phương trình $\frac{3 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 4 \cos^2 x + 1} \leq m + 1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m \geq \frac{3\sqrt{5}}{4}$. B. $m \geq \frac{3\sqrt{5} + 9}{4}$. C. $m \geq \frac{3\sqrt{5} - 9}{2}$. D. $m \geq \frac{3\sqrt{5} - 9}{4}$.

Câu 37. Tìm m để các bất phương trình $\frac{4 \sin 2x + \cos 2x + 17}{3 \cos 2x + \sin 2x + m + 1} \geq 2$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $\sqrt{10} - 3 < m \leq \frac{15 - \sqrt{29}}{2}$.

B. $\sqrt{10} - 1 < m \leq \frac{15 - \sqrt{29}}{2}$.

C. $\sqrt{10} - 1 < m \leq \frac{15 + \sqrt{29}}{2}$.

D. $\sqrt{10} - 1 < m < \sqrt{10} + 1$.

Câu 38. Cho $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa $\cos 2x + \cos 2y + 2 \sin(x + y) = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{\sin^4 x}{y} + \frac{\cos^4 y}{x}.$$

A. $\min P = \frac{3}{\pi}$.

B. $\min P = \frac{2}{\pi}$.

C. $\min P = \frac{2}{3\pi}$.

D. $\min P = \frac{5}{\pi}$.

Câu 39. Tìm k để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{k \sin x + 1}{\cos x + 2}$ lớn hơn -1 .

A. $|k| < \sqrt{2}$.

B. $|k| < 2\sqrt{3}$.

C. $|k| < \sqrt{3}$.

D. $|k| < 2\sqrt{2}$.

ĐÁP ÁN

1 D	12 B	20 B	28 C	1 A	9 A	17 D	25 D	33 C
2 B	13 D	21 B	29 B	2 D	10 B	18 C	26 C	34 C
3 C	14 C	22 B	30 A	3 A	11 A	19 D	27 A	35 C
4 C	15 B	23 B	31 D	4 B	12 C	20 D	28 B	36 D
8 B	16 A	24 A	32 A	5 A	13 C	21 B	29 B	37 B
9 B	17 D	25 D	33 B	6 A	14 A	22 A	30 D	38 B
10 A	18 A	26 B	34 B	7 D	15 A	23 D	31 D	39 B
11 D	19 B	27 D	35 B	8 C	16 D	24 C	32 D	39 D

1.2 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN CÓ ĐIỀU KIỆN

1.2.1 Tóm tắt lí thuyết

Các phương trình có dạng $\sin x = m$; $\cos x = m$; $\tan x = m$; $\cot x = m$ được gọi là các phương trình lượng giác cơ bản.

Phương trình $\sin x = m$ (1)

- Trường hợp $|m| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Trường hợp $|m| \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm.
- Nếu α là 1 nghiệm của phương trình (1) thì nghiệm của phương trình (1) là

$$\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình (1) có duy nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Nghiệm này được ký hiệu là $\arcsin m$. Do đó nghiệm của phương trình (1) là

$$\begin{cases} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

- Nếu $\sin x = \sin \alpha$ thì phương trình (1) có nghiệm là $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Tổng quát: $\sin f(x) = \sin g(x)$ thì nghiệm của nó là $\begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

- Nếu $\sin x = \sin \beta^\circ$ thì phương trình (1) có nghiệm là $\begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

- Đặc biệt:

$$+ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$+ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$+ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình $\cos x = m$ (2)

- Trường hợp $|m| > 1$ thì phương trình (2) vô nghiệm.
- Trường hợp $|m| \leq 1$ thì phương trình (2) có nghiệm.
- Nếu α là 1 nghiệm của phương trình (2) thì nghiệm của phương trình (2) là

$$\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

! Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình (2) có duy nhất một nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$. Nghiệm này được ký hiệu là $\arccos m$. Do đó nghiệm của phương trình (2) là

$$\begin{cases} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

- Nếu $\cos x = \cos \alpha$ thì phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Tổng quát:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \text{ thì nghiệm của phương trình là } \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

- Nếu $\cos x = \cos \beta^\circ$ thì phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

- **Đặc biệt:**

$$+ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$+ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$+ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình $\tan x = m$ (3)

- $\forall m$ phương trình (3) luôn có nghiệm thỏa điều kiện

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu α là một nghiệm của phương trình (3) thì nghiệm của phương trình (3) là

$$x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

! **Chú ý:** Với mọi m thì phương trình (3) luôn có duy nhất một nghiệm thuộc đoạn $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Nghiệm này ký hiệu là $\arctan m$.

Do đó nghiệm của phương trình là $x = \arctan m + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- Nếu $\tan x = \tan \alpha$ thì nghiệm của (3) là $x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Tổng quát: $\tan f(x) = \tan g(x)$ thì nghiệm của (3) là $f(x) = g(x) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- Nếu $\tan x = \tan \beta^\circ$ thì nghiệm của (3) là $x = \beta^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$.

- **Đặc biệt:**

$$+ \tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$+ \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Phương trình $\cot x = m$ (4)

- $\forall m$ phương trình (4) luôn có nghiệm thỏa điều kiện

$$x \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu α là một nghiệm của phương trình (4) thì nghiệm của phương trình (4) là

$$x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: Với $\forall m$ thì phương trình (4) luôn có duy nhất một nghiệm thuộc đoạn $(0; \pi)$. Nghiệm này kí hiệu là $\operatorname{arccot} m$. Do đó nghiệm của phương trình (4) là

$$x = \operatorname{arccot} m + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu $\cot x = \cot \alpha$ thì nghiệm của (4) là $x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
Tổng quát: $\cot f(x) = \cot g(x)$ thì nghiệm của (4) là $f(x) = g(x) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
- Nếu $\cot x = \cot \beta^\circ$ thì nghiệm của (4) là $x = \beta^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$.
- Đặc biệt:

$$+ \cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$+ \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$+ \tan f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow \tan f(x) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - g(x) \right).$$

$$+ \tan f(x) = -\tan g(x) \Leftrightarrow \tan f(x) = \tan(-g(x)).$$

1.2.2 Kỹ năng cơ bản

Khi giải phương trình lượng giác có $\tan x$, $\cot x$ hoặc phương trình có chứa ẩn ở mẫu, trước hết ta cần tìm điều kiện xác định của phương trình. Sau đó sử dụng các công thức lượng giác để biến đổi đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

- **Bước 1.** Tìm nghiệm của biểu thức $P(x)$, hoặc giá trị của x làm biểu thức $P(x)$ không xác định.
- **Bước 2.** Sắp xếp các giá trị của x tìm được theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.
- **Bước 3.** Sử dụng máy tính tìm dấu của $P(x)$ trên từng khoảng của bảng xét dấu.

1.2.3 Bài tập tự luận

Ví dụ 1. Giải phương trình $\tan \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = 0$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\tan \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - \cot \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = 0$

Ví dụ 3. Giải phương trình $3 - \sqrt{3} \tan \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 0$ với $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = 0$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\left(\cot\frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot\frac{x}{2} + 1\right) = 0$. (1)

Ví dụ 6. Giải phương trình $\tan(x - 30^\circ)\cos(2x - 150^\circ) = 0$. (1)

Ví dụ 7. Giải phương trình $(3\tan x + \sqrt{3})(2\sin x - 1) = 0$. (1)

Ví dụ 8. Giải phương trình $\cos 2x \cdot \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. (1)

Mức độ vận dụng

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$.

Bài 2. Giải phương trình $3\tan^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{1 - \sin x}{\sin x}\right)$. (*)

Bài 3. Giải phương trình $1 + \sin x + \cos x + \tan x = 0$. (*)

Bài 4. Giải phương trình $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. (*)

Bài 5. Giải phương trình $\tan x \cdot \sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$.

Bài 6. Giải phương trình $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$.

Bài 7. Giải phương trình $\frac{\cos 2x + 3\cot 2x + \sin 4x}{\cot 2x - \cos 2x} = 2$. (1)

Bài 8. Giải phương trình $\frac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 3\cos 2x - 9}{\cos x} = 0$ (*)

Bài 9. Giải phương trình $\frac{\cos x(\cos x + 2\sin x) + 3\sin x(\sin x + \sqrt{2})}{\sin 2x - 1} = 1$.

Bài 10. Giải phương trình $\frac{\sin^2 2x - 2}{\sin^2 2x - 4\cos^2 x} = \tan^2 x$. (1)

Bài 11. Giải phương trình $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x \sin 2x$.

Bài 12. Giải phương trình $2\tan x + \cot x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$. (1)

Bài 13. Giải phương trình $\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$.

Bài 14. Giải phương trình $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$. (*)

Bài 15. Giải phương trình $\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$. (*)

Bài 16. Giải phương trình $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$.

1.2.4 Bài tập Trắc nghiệm

Câu 1. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$.

- A. $x = k\pi; x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\pi; x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = k2\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2. Phương trình $\tan x = \tan \frac{x}{2}$ có nghiệm là

- A. $x = k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pi + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\pi + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Phương trình $\tan^2 x = 3$ có tất cả các nghiệm là

- A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \arctan 3 + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pm \arctan 3 + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 5. Giải phương trình $\tan x = \cot x$.

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\tan \left(x + \frac{\pi}{5}\right) + \sqrt{3} = 0$.

- A. $x = \frac{8\pi}{15} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{8\pi}{15} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{8\pi}{15} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{8\pi}{15} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\cos 2x - \sin x = 0$.

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 8. Nghiệm của phương trình $\tan 2x - \tan x = 0$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 9. Tập nghiệm S của phương trình $\tan 3x \cot 2x = 1$ là

- A. $S = \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \emptyset$. D. $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 10. Phương trình nào sau đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\tan x = 1$?

- A. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\cot x = 1$. D. $\cot^2 x = 1$.

Câu 11. Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x = m$ có nghiệm?

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq -1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m \leq -1$.

Câu 12. Phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm khi

- A. $m < -1; m > 1$. B. $m > 1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m < -1$.

Câu 13. Cho phương trình $\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0$, m là tham số. Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có nghiệm?

- A. $m < 1 - \sqrt{3}$. B. $m > 1 + \sqrt{3}$.
C. $1 - \sqrt{3} \leq m \leq 1 + \sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}$.

Câu 14. Hỏi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $\sin x = 1$. B. $\sin x = 0$. C. $\cos 2x = 0$. D. $\cos 2x = -1$.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x = 1$ là

- A. $x = k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pi + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 17. Tìm tập nghiệm S của phương trình $2\sin x \cos x = 1$.

- A. $S = \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. B. $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $S = \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $S = \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\sin 3x = \cos x$ là

- A. $x = k\pi, x = k\frac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 19. Nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ của phương trình $\sin 4x + \cos 5x = 0$ theo thứ tự là

- A. $x = -\frac{\pi}{18}$ và $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = -\frac{\pi}{18}$ và $x = \frac{2\pi}{9}$.
C. $x = -\frac{\pi}{18}$ và $x = \frac{\pi}{6}$. D. $x = -\frac{\pi}{18}$ và $x = \frac{\pi}{3}$.

Câu 20. Phương trình $\sin 3x(\cos x - 2\sin 3x) + \cos 3x(\sin x - 2\cos 3x) = 0$ có tập nghiệm là tập hợp nào sau đây?

- A. $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $T = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $W = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $V = \emptyset$.

Câu 21. Phương trình $2\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3} + 1$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{5\pi}{4} + k\pi, x = \frac{5\pi}{16} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, x = \frac{7\pi}{24} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 22. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $3\cos x + 2|\sin x| = 2$.

- A. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 23. Phương trình $(\sin x - \sin 2x)(\sin x + \sin 2x) = \sin^2 3x$ có các nghiệm là

- A. $x = k\frac{\pi}{3}, x = k\frac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\frac{\pi}{6}, x = k\frac{\pi}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = k\frac{2\pi}{3}, x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k3\pi, x = k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

- Câu 24.** Phương trình $3 \cos^2 4x + 5 \sin^2 4x = 2 - 2\sqrt{3} \sin 4x \cos 4x$ có nghiệm là
- A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- C. $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

- Câu 25.** Phương trình $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$ có nghiệm là
- A. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{\pi}{8} + k\pi, x = k\frac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- C. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, x = k2\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- D. $x = \frac{5\pi}{4} + k\pi, x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, x = k\frac{\pi}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

- Câu 26.** Phương trình $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$ có các nghiệm là
- A. $x = k\frac{\pi}{12}, x = k\frac{\pi}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\frac{\pi}{9}, x = k\frac{\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- C. $x = k\frac{\pi}{6}, x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k\frac{\pi}{3}, x = k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

- Câu 1.** Phương trình: $4 \sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 3x = 1$ có các nghiệm là
- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{3} \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{cases}$.

- Câu 2.** Giải phương trình $\tan x + \tan 2x = -\sin 3x \cdot \cos 2x$.
- A. $x = \frac{k\pi}{3}, x = \pi + k2\pi$. B. $x = \frac{k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.
- C. $x = \frac{k\pi}{3}$. D. $x = k2\pi$.

- Câu 3.** Giải phương trình $\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 1$.
- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. D. Vô nghiệm.

- Câu 4.** Giải phương trình $8 \cot 2x = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sin 2x}{\cos^6 x + \sin^6 x}$.
- A. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. B. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

- Câu 5.** Phương trình $\tan x + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$ tương đương với phương trình.
- A. $\cot x = \sqrt{3}$. B. $\cot 3x = \sqrt{3}$. C. $\tan x = \sqrt{3}$. D. $\tan 3x = \sqrt{3}$.

- Câu 6.** Giải phương trình $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} - \tan^2 x = 4$.
- A. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$. C. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. D. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

PHẦN 3: ÔN TẬP

- Bài 1.** Giải phương trình $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$.
- Bài 2.** Giải phương trình $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$.
- Bài 3.** Giải phương trình $\sin x + \cos x + 1 + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Chủ đề 2.5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN CÓ NGHIỆM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN (trình bày như trong phần 2.4)

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Khi giải phương trình lượng giác có nghiệm thỏa điều kiện cho trước, ta làm như sau:

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2. Giải phương trình để tìm nghiệm.

Bước 3. So sánh nghiệm với điều kiện xác định của phương trình và điều kiện cho trước của bài toán để loại những nghiệm không thỏa

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Mức độ nhận biết

Bài 4. Giải phương trình $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ với $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$.

Bài 5. Tìm nghiệm $0 < x < \pi$ của phương trình $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

Bài 6. Tìm nghiệm $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$.

Bài 7. Tìm nghiệm $\pi \leq x \leq 3\pi$ của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Bài 8. Tìm nghiệm $0 \leq x \leq 2\pi$ của phương trình $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ với $0 \leq x \leq 2\pi$.

Bài 10. Tìm nghiệm $x \in (-180^\circ; 180^\circ)$ của phương trình $2 \sin(2x - 40^\circ) = \sqrt{3}$.

Bài 11. Giải phương trình $2 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0$ với $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Mức độ thông hiểu

Bài 12. Tìm nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \pi$.

Bài 13. Tìm nghiệm của phương trình $\cos 2x + \sin x = 0$ trong khoảng $[0; 2\pi)$.

Bài 14. Giải phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ với $[2\pi; 4\pi]$.

Bài 15. Giải phương trình $\cos^2 x + \cos x = 0$ với $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

Bài 16. Giải phương trình $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ với $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

Bài 17. Giải phương trình $2 \cos^2 x + 3 \sin x - 3 = 0$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Bài 18. Tìm m để phương trình $\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = m$ có nghiệm.

Bài 19. Giải phương trình $\sin^2 x - \sin x = 0$ với $0 < x < \pi$.

Bài 1. Giải phương trình $\sin^2 x + \sin x = 0$ với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Bài 2. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x \cdot \cos x = \sin 2x$ thuộc $(0; 2\pi)$.

Bài 3. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin^2 x = 2 \sin x \cdot \cos 2x$ thuộc $[0; \pi]$.

Bài 4. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 7x \cdot \cos 5x$ thuộc $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 5. Tìm m để phương trình $2 \sin^2 x - (2m + 1) \sin x + m = 0$ có nghiệm với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Bài 6. Giải phương trình $2 \cos^2 \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 5 = 0$ với $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Mức độ vận dụng - vận dụng cao

Bài 7. Tìm nghiệm của phương trình $\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x$ trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 8. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 8x + \cos 4x = 1 + 2 \sin 2x \cdot \cos 6x$ thuộc $(-\pi; \pi)$.

Bài 9. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{\sqrt{3} \sin 3x - 2 \sin x \cdot \sin 2x - \cos x}{\sin x} = 0$ thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 10. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ thuộc $(0; \pi)$.

Bài 11. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin^2 x = 2 \sin x \cdot \cos 2x$ thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

Bài 12. Tìm nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 13. Tìm nghiệm của phương trình $\sin 2x + \sin x - \frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2 \cot 2x$ trong khoảng $(0; \pi)$.

Bài 14. Phương trình $\cos 22x + 3 \cos 18x + 3 \cos 14x + \cos 10x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 15. Tìm m để phương trình $2 \sin x + m \cos x = 1 - m$ có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 16. Tìm nghiệm của phương trình $\sin^2 4x + 3 \sin 4x \cdot \cos 4x - 4 \cdot \cos^2 4x = 0$ khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài 17. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x \cdot \cos 2x + 3 \cos^2 x + 1$ thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$.

Bài 18. Tìm các nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{2\pi}{5}; \frac{6\pi}{7}\right)$ của phương trình $\sqrt{3} \sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2}$.

Bài 19. Tìm các nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; 3\pi\right)$ của phương trình

$$\sin \left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3 \cos \left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2 \sin x.$$

Bài 20. Tìm m để phương trình $\sin x + m \cos x = m$ có 4 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\pi; \frac{7\pi}{3}\right)$.

Bài 21. Tìm m để $m(\sin x + \cos x + 1) = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x$ có nghiệm thuộc $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 22. Cho phương trình $2 \cos 2x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cdot \cos^2 x = m(\sin x + \cos x)$. Tìm m để phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 23. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin 2x + \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 2 = 0$.

1.2.5 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

Câu 1. Phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ có nghiệm thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ là

- A. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{6}$.
 C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{3}$.

Câu 2. Phương trình $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thỏa $0 < x < \pi$.

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 3. Phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ có nghiệm thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pm \frac{\pi}{6}$. D. $x = \pm \frac{\pi}{3}$.

Câu 4. Phương trình $\cos^2 x - \cos x = 0$ có nghiệm thỏa mãn $0 < x < \pi$ là

- A. $x = \frac{\pi}{6}$. B. $x = \frac{\pi}{2}$. C. $x = \frac{\pi}{4}$. D. $x = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $\sin x = \cos x$ trong đoạn $[-\pi; \pi]$ là

- A. 2. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 6. Nghiệm của phương trình lượng giác $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \pi$ là

- A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = 0$. C. $x = \pi$. D. $x = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \frac{\pi}{2}$ là

- A. $x = \frac{\pi}{3}$. B. $x = \frac{\pi}{2}$. C. $x = \frac{\pi}{6}$. D. $x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 8. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin x = 0$ thỏa điều kiện $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ là

- A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = 0$. C. $x = \frac{\pi}{3}$. D. $x = \pi$.

MỨC ĐỘ THÔNG HIỂU

Câu 1. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ với $\pi \leq x \leq 3\pi$ là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 2. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ với $0 \leq x \leq 2\pi$ là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \leq x \leq 5\pi$ là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 4. Gọi X là tập nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $290^\circ \in X$. B. $250^\circ \in X$. C. $220^\circ \in X$. D. $240^\circ \in X$.

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin x = 0$ thỏa $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 6. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ thuộc khoảng $(\pi; 8\pi)$ là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

- Câu 7.** Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$ là
 A. 2. B. 6. C. 5. D. 4.
- Câu 8.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ với $0 \leq x \leq 2\pi$ là
 A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.
- Câu 9.** Số nghiệm của phương trình $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$.
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 10.** Số nghiệm của phương trình $\sin x = \cos x$ trong đoạn $[-\pi; \pi]$ là
 A. 2. B. 4. C. 5. D. 6.

MỨC ĐỘ VẬN DỤNG

- Câu 1.** Tìm m để phương trình $\cos 2x - (2m + 1) \cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.
 A. $-1 \leq m < 0$. B. $0 < m \leq 1$. C. $0 \leq m < 1$. D. $-1 < m < 0$.
- Câu 2.** Tìm m để phương trình $(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.
 A. $-1 < m \leq 1$. B. $0 < m \leq \frac{1}{2}$. C. $-1 < m \leq -\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2} < m \leq 1$.
- Câu 3.** Các nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}$ là:
 A. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$. C. $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$. D. $\frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}$.
- Câu 4.** Các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{5}{8}$ là
 A. $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \pi$. B. $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}$.
- Câu 5.** Cho phương trình $\cos 5x \cos x = \cos 4x \cos 2x + 3 \cos^2 x + 1$. Các nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình là:
 A. $\frac{\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$. B. $-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$. C. $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}$. D. $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$.
- Câu 6.** Cho phương trình: $\left(\sin x + \frac{\sin 3x + \cos 3x}{1 + 2 \sin 2x}\right) = \frac{3 + \cos 2x}{5}$. Các nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ là:
 A. $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$. B. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$. C. $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

ĐÁP ÁN

1.3 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

1.3.1 Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Dạng 1. Một số dạng cơ bản phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Định nghĩa 1. Một số dạng cơ bản phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0, \quad (a \neq 0)$$

$$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \cos x + c = 0, \quad (a \neq 0)$$

$$a \cdot \tan^2 x + b \cdot \tan x + c = 0, \quad (a \neq 0)$$

$$a \cdot \cot^2 x + b \cdot \cot x + c = 0, \quad (a \neq 0)$$

Phương pháp giải

Bước 1: Sử dụng các công thức lượng giác, có thể biến đổi phương trình lượng giác về dạng $at^2 + bt + c = 0$ (1) hay $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$ (2) trong đó t là một ẩn số phụ lượng giác.

Các ẩn số phụ thường gặp là

- Đặt $t = \sin x, \cos x, \cos 2x, \dots$ với điều kiện $-1 \leq t \leq 1$.
- Đặt $t = \sin^2 x, \cos^2 x, \dots$ với điều kiện $0 \leq t \leq 1$.
- Đặt $t = \tan x, \cot x, \dots$ với điều kiện $t \in \mathbb{R}$.

Bước 2: Giải (1) hay (2) để tìm nghiệm t thỏa điều kiện. Suy ra nghiệm x .

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

c) $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1) \tan x - \sqrt{3} = 0$

b) $\sin^2 x + 3 \sin x + 2 = 0$

d) $\cot^2 x + 4 \cot x + 3 = 0$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\cos 2x - 3 \sin x - 2 = 0$

c) $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$

b) $\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$

d) $\tan x - \cot x = \frac{3}{2}$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau

a) $\cos^3 x + 3 \cos^2 x + 2 \cos x = 0$

c) $2 \cos 3x \cdot \cos x - 4 \sin^2 2x + 1 = 0$

b) $23 \sin x - \sin 3x = 24$

d) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{15}{8} \cos 2x - \frac{1}{2}$

I. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình $4 \cos^2 x - 2(1 + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{3} = 0$ (*).

Bài 2. Giải phương trình $5 \cos x - 2 \sin \frac{x}{2} + 7 = 0$.

Bài 3. Giải phương trình $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$.

Bài 4. Giải phương trình $\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 4$.

Bài 5. Giải phương trình $\cos 4x + 12\sin x \cdot \cos x - 5 = 0$.

Bài 6. Giải phương trình $\frac{3}{\sin^2 x} - 2\sqrt{3}\cot x - 6 = 0$.

Bài 7. Giải phương trình $4\cos^2(6x - 2) + 16\cos^2(1 - 3x) = 13$.

Bài 8. Giải phương trình $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2}$.

Bài 9. Giải phương trình $\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 6\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0$.

Bài 10. Giải phương trình $\cos 5x \cos x = \cos 4x \cos 2x + 3\cos^2 x + 1$.

II. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 7. Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$ B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2}{3}\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\frac{2}{3}\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\frac{5}{2}\pi, \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 8. Nghiệm của phương trình $2\cos 2x + 3\sin x - 1 = 0$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \end{cases}.$ B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{1}{2}\pi \end{cases}.$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\frac{2}{3}\pi \\ x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{2}{3}\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{2}{3}\pi \end{cases}.$ D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \end{cases}.$

Câu 9. Nghiệm của phương trình $3\cos 4x - \sin^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \arccos\frac{6}{7} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$ B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \arccos\frac{6}{7} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \pm \arccos\frac{6}{7} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$ D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \arccos\frac{6}{7} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 10. Nghiệm của phương trình $2\cos 2x + 3\sin x - 1 = 0$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$ B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{1}{2}\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

$$\text{C. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\frac{2}{3}\pi \\ x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{2}{3}\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\frac{2}{3}\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{D. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 11. Nghiệm của phương trình $3 \cos 4x - \sin^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$ là

$$\text{A. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{B. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{D. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 12. Giải phương trình $4 \cos x \cos 2x + 1 = 0$.

$$\text{A. } \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{8} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{B. } \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{8} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{8} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{D. } \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{8} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 13. Họ nghiệm của phương trình $16(\sin^8 x + \cos^8 x) = 17 \cos^2 2x$ là

$$\text{A. } x = \frac{\pi}{8} + k\frac{5\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{B. } x = \frac{\pi}{8} + k\frac{7\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{C. } x = \frac{\pi}{8} + k\frac{9\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{D. } x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 14. Nghiệm của phương trình $\cos^4 x - \cos 2x + 2 \sin^6 x = 0$.

$$\text{A. } x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{B. } x = k\frac{1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{C. } x = k\frac{2}{3}\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{D. } x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 15. Giải phương trình $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$.

$$\text{A. } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{B. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{C. } x = \frac{\pi}{2} + k3\pi, x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\frac{7}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{D. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$.

$$\text{A. } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{B. } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\frac{2}{3}\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{C. } x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad \text{D. } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 17. Nghiệm của phương trình $9 - 13 \cos x + \frac{4}{1 + \tan^2 x} = 0$ là

$$\text{A. } x = k2\pi. \quad \text{B. } x = k\pi. \quad \text{C. } x = k\frac{1}{2}\pi. \quad \text{D. } x = k\frac{2}{3}\pi.$$

Câu 18. Giải phương trình $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

$$\text{A. } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi. \quad \text{B. } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\frac{2}{3}\pi. \quad \text{C. } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\frac{3}{4}\pi. \quad \text{D. } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

Câu 19. Nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3 \cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2 \sin x$ là

$$\text{A. } \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 20. Giải phương trình $7 \cos x = 4 \cos^3 x + 4 \sin 2x$.

$$\text{A. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\frac{1}{4}\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}.$$

Câu 21. Giải phương trình $\cos 4x = \cos^2 3x$.

$$\text{A. } \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases} \\ \text{C. } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k3\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{12} + k3\pi \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}.$$

Câu 22. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin 3x + \cos 2x = 2 \sin x \cdot \cos 2x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

$$\text{A. } \left(0; \frac{\pi}{6}\right]. \quad \text{B. } \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]. \quad \text{C. } \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]. \quad \text{D. } \left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right].$$

Câu 23. Cho phương trình $3 \cos 4x - 2 \cos^2 3x = 1$. Trên đoạn $[0; \pi]$, tổng các nghiệm của phương trình là

$$\text{A. } 0. \quad \text{B. } \pi. \quad \text{C. } 2\pi. \quad \text{D. } 3\pi.$$

1.3.2 Phương trình bậc nhất đối với sin và cos

➤ Dạng 2. Phương trình bậc nhất đối với sin và cos

Định nghĩa 2. Là phương trình có dạng $a \sin x + b \cos x = c$ (1); với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$.

Hoặc $a \sin x - b \cos x = c$; $a \cos x + b \sin x = c$.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Cách 1:

* Điều kiện để phương trình có nghiệm $a^2 + b^2 \geq c^2$.

* Chia hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (*)$$

* Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$; $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$ với $\alpha \in [0, 2\pi)$.

$$(*) \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \alpha + \cos x \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ đưa về phương trình lượng giác cơ bản.}$$

$$\text{Hoặc đặt } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha \text{ với } \alpha \in [0, 2\pi).$$

$$\text{Thì } (*) \Leftrightarrow \sin x \cdot \sin \alpha + \cos x \cdot \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Cách 2: (Thường dùng để biện luận)

$$* \text{ Đặt } t = \tan \frac{x}{2}; \text{ thay } \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Ta được phương trình bậc hai theo t .

* Giải phương trình tìm t . Suy ra nghiệm x .

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } \sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$$

$$\text{c) } \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{b) } \sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

$$\text{d) } 5 \sin 2x + 12 \cos 2x = 13$$

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \sqrt{3} \sin(\pi - 2x) = 2$$

$$\text{b) } 3 \sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x$$

$$\text{c) } \sqrt{3} \sin 7x - \cos 7x = 2 \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Ví dụ 6. Tìm m để phương trình $(m - 1) \cos x + 2 \sin x = m + 3$ có nghiệm.

I. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 11. Giải phương trình sau: $(\sqrt{3} - 1) \sin x - (\sqrt{3} + 1) \cos x = 1 - \sqrt{3}$.

Bài 12. Giải phương trình sau: $3 \sin x - 4 \cos x = 5$

Bài 13. Giải phương trình sau: $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$

Bài 14. Giải phương trình sau: $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos x$.

Bài 15. Giải phương trình sau: $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$.

Bài 16. Giải phương trình sau: $\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}$.

Bài 17. Giải phương trình sau: $\cos x + \sqrt{3} \sin x + 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Bài 18. Giải phương trình sau: $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$.

Bài 19. Giải phương trình sau: $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cdot \cos 2x - \sin x = 0$.

Bài 20. Giải phương trình sau: $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$.

II. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 24. Giải phương trình $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 1 = 0$.

A. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 25. Họ nghiệm của phương trình : $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 5x$ là:

A. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{5} \\ x = -\frac{5\pi}{12} - k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{5\pi}{12} - 2k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{5\pi}{12} - k\frac{\pi}{2} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{5\pi}{12} - k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 26. Giải phương trình : $\sqrt{3}(\sin 2x + \cos 7x) = \sin 7x - \cos 2x$.

A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = \frac{7\pi}{54} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{3\pi}{5} \\ x = \frac{7\pi}{54} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \\ x = \frac{7\pi}{54} + k\frac{\pi}{9} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = \frac{7\pi}{54} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 27. Nghiệm của phương trình : $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$ là:

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{5} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 28. Khẳng định nào đúng về phương trình $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \cos x = 3 + \cos 2x$.

A. Có một họ nghiệm.

B. Có hai họ nghiệm.

C. Vô nghiệm.

D. Có một nghiệm duy nhất.

Câu 29. Giải phương trình : $3 \cos 4x - \sin^2 2x + \cos 2x - 2 = 0$.

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \arccos \frac{6}{7} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 30. Giải phương trình: $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x$.

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 31. Giải phương trình: $\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$.

A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 32. Nghiệm của phương trình: $\frac{\cos x - 2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos^2 x + \sin x - 1} = \sqrt{3}$.

A. $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k5\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 33. Giải phương trình: $\frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1} = \frac{2}{3} (3 - \sqrt{3} \sin x)$.

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k3\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k3\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

1.3.3 Phương trình thuần nhất đối với sin và cos

Dạng 3. Phương trình thuần nhất đối với sin và cos

Định nghĩa 3. Phương trình đẳng cấp bậc hai có dạng $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$, ($a^2 + c^2 \neq 0$)

Phương trình đẳng cấp bậc ba có dạng $a \sin^3 x + b \cos^3 x + c \sin^2 x \cos x + d \sin x \cos^2 x + e \sin x + f \cos x = 0, \dots$

Phương pháp giải.

Giải phương trình $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$, ($a^2 + c^2 \neq 0$) (1)

Cách 1:

* Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ có là nghiệm của phương trình hay không.

* Xét $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x$, ta được phương trình $a \tan^2 x + b \tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$.

Cách 2:

Sử dụng công thức hạ bậc $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

(1) $\Leftrightarrow b \sin 2x + (c - a) \cos 2x = 2d - a - c$: phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$.

Giải phương trình $a \sin^3 x + b \cos^3 x + c \sin^2 x \cos x + d \sin x \cos^2 x + e \sin x + f \cos x = 0$.

Chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$, ta được phương trình bậc ba theo $\tan x$.

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau

a) $2 \sin^2 x + 7 \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 4$

b) $3 \sin^2 2x - \sin 2x \cdot \cos 2x - 4 \cos^2 2x = 2$

$$c) \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau

a) $3 \sin^3 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos^2 x$

b) $6 \sin x + 2 \cos^3 x = 5 \sin 2x \cdot \cos x$

c) $3 \cos^4 x - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x = 0$

I. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 21. Giải phương trình $\sqrt{3} \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \cos^2 x + 1 - \sqrt{3} = 0$.

Bài 22. Giải phương trình $9 \sin^2 x - 30 \sin x \cos x + 25 \cos^2 x = 25$.

Bài 23. Giải phương trình $\sin 2x - 2 \sin^2 x = 2 \cos 2x$.

Bài 24. Giải phương trình $\sin x - 4 \sin^3 x + \cos x = 0$.

Bài 25. Giải phương trình $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x$.

Bài 26. Giải phương trình $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \sin x + \cos x$.

Bài 27. Giải phương trình $2\sqrt{2} \cos^3 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 \cos x - \sin x = 0$.

Bài 28. Giải phương trình $\tan x \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$.

Bài 29. Giải phương trình $2 \sin^3 x = \cos x$.

Bài 30. Giải phương trình $6 \sin x - 2 \cos^3 x = \frac{5 \sin 4x \cos x}{2 \cos 2x}$.

II. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 34. Giải phương trình $2 \cos^2 x + 6 \sin x \cos x + 6 \sin^2 x = 1$.

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\frac{2}{3}\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{1}{4}\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\frac{1}{4}\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 35. Giải phương trình $\cos^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x$.

A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\begin{cases} x = k\frac{2}{3}\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2}{3}\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\begin{cases} x = k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 36. Giải phương trình $4 \sin^3 x + 3 \cos^3 x - 3 \sin x - \sin^2 x \cos x = 0$.

A. $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{C. } \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k\frac{1}{3}\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{3}\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 37. Giải phương trình $2 \cos^3 x = \sin 3x$.

$$\text{A. } \begin{cases} x = \arctan(-2) + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = \arctan(-2) + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = \arctan(-2) + k\frac{1}{3}\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{3}\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = \arctan(-2) + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 38. Giải phương trình $\sin^2 x (\tan x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$.

$$\text{A. } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\frac{2}{3}\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 39. Giải phương trình $\cos^3 x + \sin^3 x = 2(\cos^5 x + \sin^5 x)$.

$$\text{A. } x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{B. } x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{C. } x = \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{3}\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{D. } x = \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 40. Giải phương trình $\sin^2 x + 3 \tan x = \cos x (4 \sin x - \cos x)$.

$$\text{A. } x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{B. } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi, x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k\frac{1}{2}\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{C. } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi, x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k\frac{2}{3}\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{D. } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan(-1 \pm \sqrt{2}) + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 41. Giải phương trình $2\sqrt{2} \cos^3 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 \cos x - \sin x = 0$.

$$\text{A. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\frac{2}{3}\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 42. Trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình $\sin^2 4x + 3 \sin 4x \cos 4x - 4 \cos^2 4x = 0$ có

- A. một nghiệm. B. hai nghiệm. C. ba nghiệm. D. bốn nghiệm.

Câu 43. Trong khoảng $(0; 2\pi)$ phương trình $\cos^3 x - 4 \sin^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 6. B. 5. C. 3. D. 2.

7 D	11 D	15 D	19 C	23 C	27 D	31 D	35 B	39 B
8 D	12 B	16 D	20 D	24 B	28 C	32 B	36 C	40 D
9 D	13 D	17 A	21 D	25 D	29 C	33 A	37 D	41 B
10 D	14 D	18 D	22 D	26 D	30 A	34 A	38 D	42 D
								43 A

1.4 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỤC

LÝ THUYẾT

Một số bài toán về phương trình lượng giác mà cách giải tùy theo đặc thù của phương trình, chứ không nằm ở trong phương pháp đã nêu ở hầu hết các sách giáo khoa.

Một số phương trình lượng giác thể hiện tính không mẫu mực ở ngay dạng của chúng, nhưng cũng có những phương trình ta thấy dạng rất bình thường nhưng cách giải lại không mẫu mực. Sau đây là những phương trình lượng giác có cách giải không mẫu mực thường gặp.

CÁC DẠNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Phương pháp đưa về tổng bình phương

Biến đổi phương trình đã cho về dạng $A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ \dots \\ A_n = 0 \end{cases}$ trong đó $A_1 \geq 0$,
 $A_2 \geq 0, \dots, A_n \geq 0$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $3 \tan^2 x + 4 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 4 \sin x + 2 = 0$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\cos^2 x - 4 \cos x - 2x \sin x + x^2 + 3 = 0$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $8 \cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sin 3x (\cos x - 2 \sin 3x) + \cos 3x (1 + \sin x - 2 \cos 3x) = 0$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x - \cos x + 4 = 0$.

Dạng 2. Phương pháp đối lập

Phương pháp này được xây dựng trên tính chất: Để giải phương trình $f(x) = g(x)$, ta có thể nghĩ đến việc chứng minh tồn tại A : $f(x) \geq A, \forall x \in (a, b)$ và $g(x) \leq A, \forall x \in (a, b)$ thì

khi đó: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$.

Nếu ta chỉ có $f(x) > A$ và $g(x) < A, \forall x \in (a, b)$ thì kết luận phương trình vô nghiệm. Một số dạng phương trình đặc biệt dùng phương pháp đối lập

$$\bullet \sin ax \cdot \sin bx = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin ax = 1 \\ \sin bx = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sin ax = -1 \\ \sin bx = -1 \end{cases}.$$

$$\bullet \sin ax \cdot \sin bx = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin ax = 1 \\ \sin bx = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sin ax = -1 \\ \sin bx = 1 \end{cases}.$$

Cách giải tương tự cho các phương trình thuộc dạng: $\cos ax \cdot \cos bx = 1$; $\cos ax \cdot \cos bx = -1$; $\sin ax \cdot \cos bx = 1$; $\sin ax \cdot \cos bx = -1$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\cos^5 x + x^2 = 0$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sin^{1996} x + \cos^{1996} x = 1$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\cos x \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 3x \sqrt{\frac{1}{\cos 3x} - 1} = 1$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\left(\tan x + \frac{1}{4} \cot x\right)^n = \cos^n x + \sin^n x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$.

Dạng 3. Phương pháp chứng minh nghiệm duy nhất

Tùy theo dạng và điều kiện của phương trình, ta tính nhằm một nghiệm của phương trình, sau đó chứng tỏ nghiệm này là duy nhất bằng một trong những cách thông dụng sau:

- Dùng tính chất đại số.
- Áp dụng tính đơn điệu của hàm số.

Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm $x = \alpha \in (a, b)$ và hàm f đơn điệu trong (a, b) thì $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = \alpha$.

Phương trình $f(x) = g(x)$ có 1 nghiệm $x = \alpha \in (a, b)$, $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số đơn điệu ngược chiều trên khoảng (a, b) thì phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm $x = \alpha$ là duy nhất.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ với $x \geq 0$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sin x + \tan x - 2x = 0$ với $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Dạng 4. Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 1. Giải phương trình $32 \cos^6 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin 6x = 1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\cos^2 x = \cos \frac{4x}{3}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin^3 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin x$ (1).

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $8 \cos^3 \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos 3x$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sqrt{2} \sin^3 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin x$.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\cos 2x = \cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}$.

Dạng 5. Phương pháp đưa về hệ phương trình

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sqrt{\sin^2 x + 2} + \sqrt{5 - \cos^2 x} = 2$.

Ví dụ 9. Giải phương trình $(\sqrt[3]{\cos x})^2 + \sqrt[3]{\sin^2 x - 3} = -\sqrt[3]{2}$.

Dạng 6. Một số phương trình lượng giác có cách giải đặc biệt.

Ví dụ 10. Giải phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = -\frac{1}{2}$ (*).

Ví dụ 11. Giải phương trình $4 \sin 3x \cos 2x = 1 + 6 \sin x - 8 \sin^3 x$ (*).

Ví dụ 12. Giải phương trình $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$ (*).

Ví dụ 13. Giải phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \cot \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cot \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$.

Ví dụ 14. Giải phương trình $\tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \tan \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \sin 3x = \sin x + \sin 2x$.

Ví dụ 15. Giải phương trình $2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x \right) = 1 + \cos (\pi \sin 2x)$.

Bài 1. Giải phương trình $x^2 - 2x \cos x - 2 \sin x + 2 = 0$.

Bài 2. Giải phương trình $\sin^{14} x + \cos^{15} x = 1$.

Bài 3. Giải phương trình $\sin^4 x + \cos^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}$.

Bài 4. Giải phương trình $\left(\tan x + \frac{1}{4} \cot x \right)^n = \sin^n x + \cos^n x$ (với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

Bài 5. Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$.

Bài 6. Giải phương trình $\sin x + \tan x - 2x = 0$ với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

Bài 7. Giải phương trình $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$.

Bài 8. Giải phương trình $\cos^4 x - \sin^4 x = |\cos x| + |\sin x|$.

Bài 9. Giải phương trình $x^2 - \sin x + 1 = 0$.

1.4.1 Phương trình lượng giác có nghiệm trên khoảng, đoạn

Bài 10. Tìm nghiệm $x \in (0; \pi)$ của phương trình $5 \cos x + \sin x - 3 = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Bài 11. Tìm nghiệm $x \in (0; \pi)$ của phương trình $4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2 \cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)$.

Bài 12. Tìm nghiệm $x \in (0; 2\pi)$ của phương trình $5 \left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) = \cos 2x + 3$.

Bài 13. Tìm m để phương trình $2 \sin x + m \cos x = 1 - m$, (1) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

Câu 5. Nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \pi$ là

- A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = \frac{\pi}{4}$. C. $x = \frac{\pi}{6}$. D. $x = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\cos^2 x + \cos x = 0$ thỏa điều kiện $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ là

- A. $x = \pi$. B. $x = \frac{\pi}{3}$. C. $x = \frac{3\pi}{2}$. D. $x = -\frac{3\pi}{2}$.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ thỏa điều kiện $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ là

- A. $x = \frac{\pi}{6}$. B. $x = \frac{\pi}{4}$. C. $x = \frac{\pi}{2}$. D. $x = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 8. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - \sin x = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \pi$ là

- A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = \pi$. C. $x = 0$. D. $x = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin x = 0$ thỏa điều kiện $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ là

- A. $x = 0$. B. $x = \pi$. C. $x = \frac{\pi}{3}$. D. $x = \frac{\pi}{2}$.

- Câu 10.** Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ trên đoạn $[\pi; 5\pi]$ là
 A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

1.4.2 Dạng toán khác về phương trình lượng giác thường gặp

Bài 24. Cho hàm số $y = \sin^2 x + (m + 1) \sin x + \frac{m}{\pi} \cdot x^2 + 2015$ (m là tham số thực thuộc \mathbb{R}). Chứng minh rằng phương trình $y' = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

Bài 25. Cho hàm số $y = f(x) = \cos^3 \sqrt{3x^2 - 2\pi x}$. Hãy tính $f'(\pi)$.

- Câu 11.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ với $0 \leq x \leq 2\pi$ là
 A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

- Câu 12.** Tìm m để phương trình $2\sin^2 x - (2m + 1) \sin x + m = 0$ có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
 A. $-1 < m < 0$. B. $1 < m < 2$. C. $-1 \leq m \leq 0$. D. $0 < m < 1$.

- Câu 13.** Tìm m để phương trình $\cos 2x - (2m + 1) \cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.
 A. $-1 \leq m < 0$. B. $0 < m \leq 1$. C. $0 \leq m < 1$. D. $-1 < m < 0$.

Câu 14. Tìm m để phương trình $(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

- A. $-1 < m \leq 1$. B. $0 < m \leq \frac{1}{2}$. C. $-1 < m \leq -\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2} < m \leq 1$.

- Câu 15.** Các nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ của phương trình $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}$ là
 A. $\frac{\pi}{6}$ và $\frac{5\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{8}$ và $\frac{5\pi}{8}$. C. $\frac{\pi}{12}$ và $\frac{5\pi}{12}$. D. $\frac{\pi}{24}$ và $\frac{5\pi}{24}$.

Câu 16. Tìm các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình

$$\left(\sin x + \frac{\sin 3x + \cos 3x}{1 + 2 \sin 2x}\right) = \frac{3 + \cos 2x}{5}.$$

- A. $\frac{\pi}{12}$ hoặc $\frac{5\pi}{12}$. B. $\frac{\pi}{6}$ hoặc $\frac{5\pi}{6}$. C. $\frac{\pi}{4}$ hoặc $\frac{5\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{3}$ hoặc $\frac{5\pi}{3}$.

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 26. Giải phương trình $\frac{4\cos^2 \frac{x}{2} + 2\cos^2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) - \sqrt{3} \cos(2x - 3\pi) - 3}{1 - 2 \sin x} = 0$.

Bài 27. Giải phương trình $\frac{1 - \cos x}{\tan x} + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{7\pi}{4}\right)$.

Bài 28. Giải phương trình $\frac{(4\sin^2 x + 1) \cos x + 2 \sin x(2 \cos x - \sqrt{3}) - \sqrt{3}}{2 \sin x + 1} + 2\sqrt{3} \sin^2 x = \cos x$.

Bài 29. Giải phương trình $\frac{2(1 + \cot 2x \cdot \cot x)}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^4 x} = 48$.

Bài 30. Cho hàm số $y = \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x}$. Chứng minh rằng: $y' = \cos x - \cos 2x$.

5 A 7 A 9 A 11 B 13 D 15 D
6 A 8 A 10 C 12 A 14 C 16 D